

ANALIZA PŁASKICH ZAGADNIENÍ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

KAZIMIERZ MYŚLECKI

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

Metoda elementów brzegowych w zastosowaniu do płaskich zagadnień teorii sprężystości doczekała się już wielu opracowań, z których wymienimy dwa — ogólne, książkowe [1, 2]. Za punkt wyjścia przyjmuje się tam równania równowagi w przemieszczeniach.

W niniejszym opracowaniu przyjęto odmienne podejście: rozpatruje się zagadnienie brzegowe dla funkcji naprężeń Airy'ego F . Gdy siły objętościowe są stałe wówczas otrzymuje się jednorodne równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 F = 0. \quad (1.1)$$

W dalszej części opracowania stosuje się zapis wskaźnikowy i umowę sumacyjną dla pary takich samych wskaźników. Wskaźniki, oznaczone małymi literami łacińskimi, przebiegają zbiór $\{1, 2\}$.

2. Podstawowe równania

Równanie (1.1) zapiszemy w notacji wskaźnikowej

$$F_{,iijj} = 0. \quad (2.1)$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania równania (2.1) w płaskim obszarze V ograniczonym krzywą L (rys. 1).

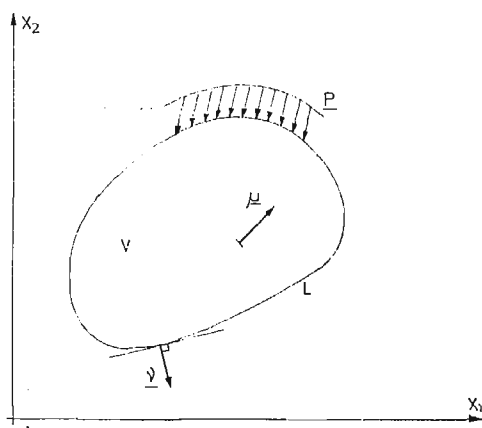
Zakładamy, że obciążenie brzegowe p jest określone w każdym punkcie krzywej L i ponadto występuje stałe obciążenie objętościowe γ skierowane przeciwnie do osi x_2 . Wówczas naprężenia można wyrazić wzorami

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} F_{,kl} + \delta_{ij} \gamma x_2, \quad (2.2)$$

gdzie ε_{ik} jest symbolem permutacyjnym, a δ_{ij} deltą Kroneckera.

Warunki równowagi na brzegu przyjmą teraz postać

$$(\varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} F_{,kl} + \delta_{ij} \gamma x_2) \nu_j = p_i. \quad (2.3)$$



Rys. 1.

Oznaczmy:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^0 &= \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} F_{kl}, \\ p_i^0 &= p_i - \nu_i \gamma x_2,\end{aligned}\quad (2.4)$$

i przepiszmy (2.3) w postaci

$$\sigma_{ij}^0 \nu_j = p_i^0. \quad (2.5)$$

Warunki (2.5) są identyczne jak dla zagadnienia bez sił objętościowych i można je wykorzystać do wyprowadzenia warunków brzegowych dla równania (2.1) [3]:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial F}{\partial \nu}(Q) &= \nu_j(Q) \varepsilon_{ij} \int_P^Q p_i^0(R) dL, \\ F(Q) &= \varepsilon_{ji} \int_P^Q (x_{Qi} - x_{Ri}) p_j^0(R) dL, \quad P, Q, R \in L.\end{aligned}\quad (2.6)$$

P jest dowolnym lecz ustalonym punktem krzywej L .

Po prawej stronie równości (2.6) mamy znane funkcje punktu $Q \in L$. Oznaczmy je przez h i g :

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = h, \quad F = g. \quad (2.7)$$

Problem brzegowy (2.1) i (2.7) będzie przedmiotem dalszych rozważań.

3. Brzegowe równania całkowe

Wraz z problemem brzegowym (2.1) i (2.7) weźmiemy pod uwagę dwa równania różniczkowe

$$\bar{F}_{,iJJ} = \delta(A', B), \quad A, B \in V, \quad (3.1)$$

i

$$F_{,ij}^* = \frac{\partial \delta(A, B)}{\partial \mu(A)}, \quad (3.2)$$

gdzie $\delta(A, B)$ jest deltą Diraca, a μ kierunkiem wzdłuż wektora μ w obszarze V . Zapis $\delta(A, B)$ należy rozumieć jako $\delta(x_{A1} - x_{B1}, x_{A2} - x_{B2})$ itp.

Rozwiązaniami szczególnymi równań (3.1) i (3.2) są funkcje

$$\bar{F} = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln \frac{r}{a}, \quad (3.3)$$

i

$$F^* = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mu} = \bar{F}_{,i} \mu_i = - \frac{\left(2 \ln \frac{r}{a} + 1\right) (r_i \mu_i)}{8\pi}. \quad (3.4)$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia

$$\begin{aligned} r_i &= x_{A1} - x_{B1}, \\ r &= \sqrt{r_i r_i}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

a — dowolna stała o wymiarze długości.

Równanie (2.1) mnożymy obustronnie, kolejno przez $\bar{F}$ i F^* , a następnie całkujemy po obszarze V . Podobnie postępujemy z równaniami (3.1) i (3.2) mnożąc je przez F . Po dwukrotnym zastosowaniu twierdzenia Ostrogradskiego-Gaussa

$$\int_V \Phi_{,i} dV = \int_L \Phi \cdot v_i dL \quad (3.6)$$

i wykorzystaniu własności funkcji δ , otrzymujemy cztery tożsamości

$$\int_L (F_{,ii} \bar{F}_{,jj} v_j - \bar{F} F_{,ii} v_j) dL = \int_V F_{,ii} \bar{F}_{,jj} dV, \quad (3.7)$$

$$\int_L (F_{,ii} F_{,jj}^* v_j - F^* F_{,ii} v_j) dL = \int_V F_{,ii} F_{,jj}^* dV, \quad (3.8)$$

$$\alpha F + \int_L (\bar{F}_{,ii} F_{,jj} v_j - \bar{F} F_{,ii} v_j) dL = \int_V F_{,ii} \bar{F}_{,jj} dV, \quad (3.9)$$

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial \mu} + \int_L (F_{,ii}^* F_{,jj} v_j - F F_{,ii}^* v_j) dL = \int_V F_{,ii} F_{,jj}^* dV. \quad (3.10)$$

Porównując stronami równości (3.7) i (3.9) oraz (3.8) i (3.10) znajdziemy

$$\begin{aligned} & \int_L [V(R) \bar{F}(A, R) + M(R) \bar{F}_v(A, R)] dL = \\ & = \alpha F(A) + \int_L [\bar{V}(A, R) F(R) + \bar{M}(A, R) F_v(R)] dL, \quad R \in L, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_L [V(R) F^*(A, R) + M(R) F_v^*(A, R)] dL = \\ & = \alpha F_\mu(A) + \int_L [V^*(A, R) F(R) + M^*(A, R) F_v(R)] dL, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} F_\nu &= F_{,j} \nu_j = \frac{\partial F}{\partial \nu}, \\ M &= F_{,ii} = \Delta F, \\ V &= -F_{,ij} \nu_j = -\frac{\partial \Delta F}{\partial \nu}, \quad \text{itp.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Współczynnik α przyjmuje wartość 1 dla $A \in V$, a 0 dla $A \notin V$ i $A \notin L$.

Zależność (3.12) przepiszemy w nieco innej postaci wykorzystując własność funkcji V^*

$$\int_L V^*(A, R) dL = 0, \quad R \in L, \quad (3.14)$$

wynikającą z równania (3.2) po scałkowaniu obustronnym po obszarze V i wykorzystaniu twierdzenia Ostrogradskiego-Gaussa

$$\begin{aligned} \int_L [V(R) F^*(A, R) + M(R) F_\nu^*(A, R)] dL &= \alpha F_\mu(A) + \\ &+ \int_L \{V^*(A, R) [F(R) - F(A)] + M^*(A, R) F_\nu(R)\} dL. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Gdy założymy, że $A \rightarrow Q$ i jednocześnie $\mu \rightarrow \nu$, z (3.11) i (3.15) otrzymamy dwa brzegowe równania całkowe dla funkcji M i V :

$$\begin{aligned} \int_L [V(R) \bar{F}(Q, R) + M(R) \bar{F}_\nu(Q, R)] dL &= \frac{1}{2} F(Q) + \\ &+ \int_L [\bar{V}(Q, R) F(R) + \bar{M}(Q, R) F_\nu(R)] dL, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \int_L [V(R) F^*(Q, R) + M(R) F_\nu^*(Q, R)] dL &= \frac{1}{2} F_\nu(Q) + \\ &+ \int_L \{V^*(Q, R) [F(R) - F(Q)] + M^*(Q, R) F_\nu(R)\} dL. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Po prawej stronie równań występują znane funkcje punktu Q , które po wprowadzeniu warunków brzegowych mają postać

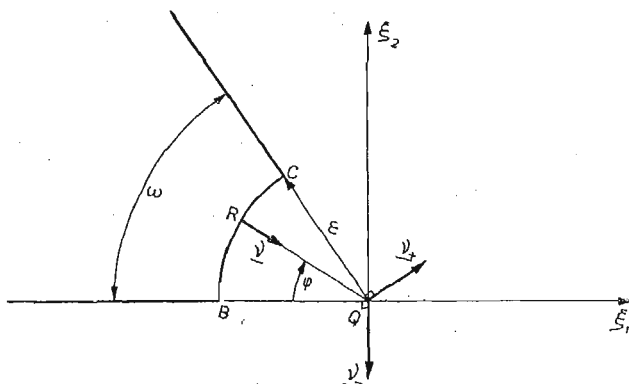
$$H(Q) = \frac{1}{2} h(Q) + \int_L [\bar{V}(Q, R) h(R) + \bar{M}(Q, R) g(R)] dL, \quad (3.18)$$

$$G(Q) = \frac{1}{2} g(Q) + \int_L \{V^*(Q, R) [h(R) - h(Q)] + M^*(Q, R) g(R)\} dL. \quad (3.19)$$

Należy zaznaczyć, że wzory (3.18) i (3.19) są słuszne jedynie dla gładkiej części brzegu L , a całki w tych wzorach rozumie się w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

Zanim przejdziemy do wyprowadzenia funkcji H i G dla punktu narożnego podamy jawną postać funkcji $\bar{M}$, M^* , $\bar{V}$ i V^*

$$\begin{aligned}
 \bar{M}(Q, R) &= \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right), \\
 M^*(Q, R) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{r_k v_k(Q)}{r^2}, \\
 \bar{V}(Q, R) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{r_k v_k(R)}{r^2}, \\
 V^*(Q, R) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{v_k(Q) v_k(R)}{r^2} - \frac{2r_k v_k(Q) r_l v_l(R)}{r^4} \right].
 \end{aligned} \tag{3.20}$$



Rys. 2.

W narożu o rozwartości ω przyjmujemy lokalny układ współrzędnych ξ_1, ξ_2 (rys. 2). W otoczeniu punktu Q funkcję Airy'ego F będziemy aproksymować funkcją liniową opartą na wartościach $F(Q)$, $\partial F/\partial v_-$ i $\partial F/\partial v_+$

$$F = \frac{1}{\sin \omega} (F_{v_+} + \cos \omega F_{v_-}) \cdot \xi_1 - F_{v_-} \cdot \xi_2 + F(Q). \tag{3.21}$$

Odpowiednie elementy wzorów (3.20) mają teraz postać

$$\begin{aligned}
 v(Q) &= v_- = [0, -1], \\
 v(R) &= [\cos \varphi, -\sin \varphi], \\
 r_1 &= -\varepsilon \cdot \cos \varphi, r_2 = \varepsilon \cdot \sin \varphi, \\
 r &= \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

a same wzory —

$$\begin{aligned}
 \bar{V} &= \frac{1}{2\pi \varepsilon}, \\
 M^* &= \frac{\sin \varphi}{2\pi \varepsilon}, \\
 V^* &= -\frac{\sin \varphi}{2\pi \varepsilon^2}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Funkcje H i G dla naroża różnią się jedynie swobodnymi składnikami (nie występującymi pod znakiem całki) od tych dla części gładkiej. Otrzymamy je ze wzorów (3.11) i (3.15). Całkowanie rozbijamy na dwie części: łuk $B-C$ (rys. 2) i pozostałą część krzywej L . Warto zauważyć, że punkt Q nie należy tutaj do obszaru V ($\alpha = 0$). Po obliczeniu granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymamy swobodny składnik w funkcji H

$$\frac{\omega}{2\pi} F(Q) \quad (3.24)$$

i w funkcji G

$$\frac{1}{2\pi} (\omega F_{v-} + \sin \omega F_{v+}). \quad (3.25)$$

Podobnie znajdziemy swobodny składnik w funkcji G dla $v(Q) = v_+$

$$\frac{1}{2\pi} (\omega F_{v+} + \sin \omega F_{v-}). \quad (3.26)$$

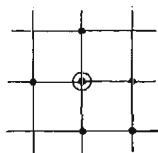
W szczególnym przypadku, gdy $\omega = \pi$, wyrażenia (3.24), (3.25) i (3.26) odpowiadają tym dla brzegu gładkiego (3.18) i (3.19).

W narożu funkcja G , podobnie jak poszukiwana funkcja V , jest nieciągła.

4. Rozwiązanie numeryczne i przykłady

Brzeg L dzieli się na elementy prostoliniowe i zakłada się stałą wartość wszystkich funkcji określonych na L w obrębie jednego elementu. Punkt węzłowy umieszcza się w środku elementu. Taka aproksymacja, choć najprostsza z możliwych i wymagająca gęstszego podziału, posiada wiele zalet: wszystkie punkty węzłowe leżą na gładkiej krzywej (odcinku prostoliniowym), unika się uciążliwego numerycznego obliczania wartości głównych osobliwych całek gdyż na odpowiednich odcinkach wyrażenia podcałkowe zawierające $\bar{V}$, M^* i V^* znikają.

Naprężenia w obszarze V oblicza się ze wzorów (2.2) aproksymując pochodne różnicami skończonymi opartymi na schemacie sześciopunktowym (rys. 3). Ze względu na przyjętą

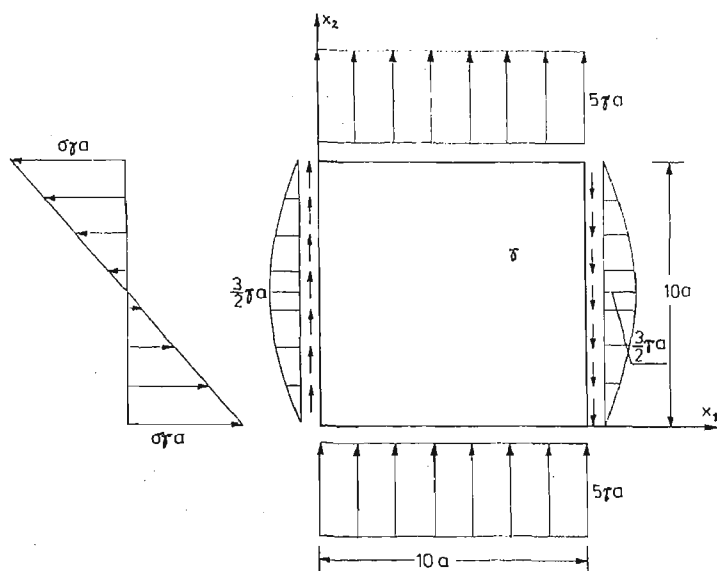


Rys. 3.

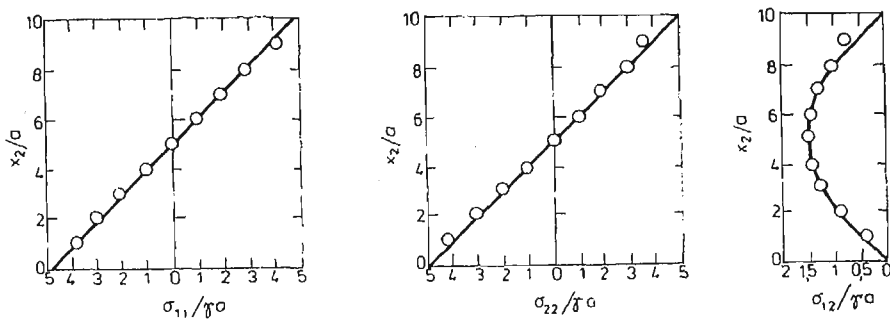
aproksymacji niemożliwe jest obliczanie naprężeń w bliskim sąsiedztwie brzegu. Na podstawie testów numerycznych jako oszacowanie minimalnej odległości od brzegu uzyskano długość najbliższego elementu.

Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwóch przykładów o znanym rozwiązaniu analitycznym.

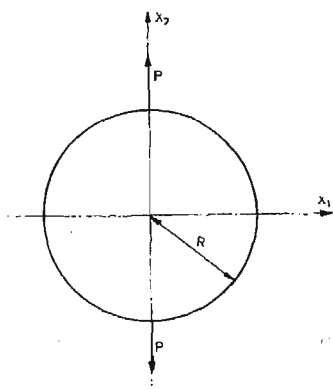
W pierwszym przykładzie rozwiązano kwadratową tarczę obciążoną ciężarem własnym γ i siłami brzegowymi o rozkładzie jak na rysunku 4. Każdy bok kwadratu został podzie-



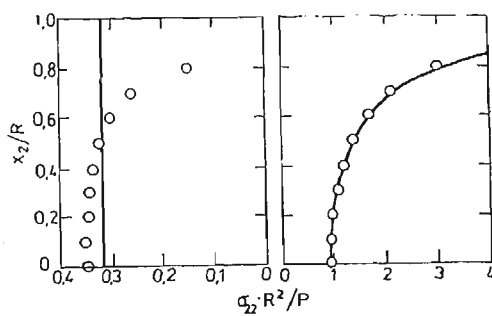
Rys. 4. Błąd: na rys. ma być: $6\gamma a$



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7. Błąd, ma być: $\sigma_{11}R^2/P$, $\sigma_{22}R^2/P$

lony na dziesięć elementów o stałej długości a . Otrzymane wartości naprężeń wzdłuż pionowej linii odległej o $2a$ od lewego boku pokazano na rys. 5.

Drugi przykład dotyczy kołowej tarczy obciążonej dwoma siłami skupionymi (rys. 6). Zastosowano tutaj 38 elementów o stałej długości. Każdą z sił skupionych rozłożono na długości jednego elementu. Na rysunku 7 przedstawiono rozkład naprężeń wzdłuż pionowego promienia.

5. Uwagi końcowe

Na podstawie wzorów (2.6) funkcjom h i g można nadać interpretację odpowiednio: siły osiowej i momentu zginającego w pewnym fikcyjnym pręcie o osi w kształcie krzywej brzegowej. Pręt taki jest przecięty w punkcie P i oczywiście statycznie wyznaczalny. Wybór punktu P , jak wspomniano wyżej, jest dowolny i ma jedynie wpływ na liniową część funkcji naprężeń. Rozkład sił wewnętrznych w tym pręcie jest dość nierównomierny: największe siły wewnętrzne, na ogół, występują w oddaleniu od punktu przecięcia. Taka sytuacja, wobec przyjętej w pracy aproksymacji funkcji na brzegu, powoduje nagromadzenie się błędów aproksymacji w niektórych obszarach. Aby tego uniknąć obliczano funkcje h i g jako siłę osiową i moment zginający w zamkniętym, statycznie niewyznaczalnym pręcie. Uzyskano w ten sposób bardziej równomierne rozłożenie błędów aproksymacji funkcji h i g (i w konsekwencji całego problemu).

W obu przedstawionych przykładach numerycznych błąd w oszacowaniu dominujących naprężeń nie przekracza kilku procent, co potwierdza, nawet przy prostych funkcjach aproksymujących i stosunkowo rzadkiej dyskretyzacji, skuteczność metody elementów brzegowych przy rozwiązywaniu tego typu zagadnień.

Literatura

1. C. A. BREBBIA, S. WALKER, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London 1980.
2. P. K. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company, London 1981.
3. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Граничная задача для функции напряжений Эри свелась к схеме двух граничных интегральных уравнений, которые решаются численно применяя метод граничных элементов. Принимаются во внимание постоянные объёмные силы. Подробно проанализировано вид уравнений в углу. Даны решения двух численных примеров, которые сравнены с аналитическими решениями.

S u m m a r y

ANALYSIS OF PLANE PROBLEMS OF ELASTICITY BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

The boundary value problem for Airy stress function is reduced to a system of two boundary integral equations. The equations are solved by the boundary element method. Constant body forces are considered. The form of the equations at a corner is analysed in detail. Two numeric examples are given and compared with analytical ones.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 marca 1986 roku.
