MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3/4, 20 (1982)

MODELE MATEMATYCZNE FENOMENOLOGICZNEJ PIEZOELEKTRYCZNOŚCI

WITOLD NOWACKI

PAN Warszawa

1. Wprowadzenie

Niektóre kryształy, takie jak kwarc, turmalin, sól Seignetta itd. poddane działaniu ciśnienia stają się elektrycznie spolaryzowanymi (P. i J. Curie, 1880). Obok tego efektu piezoelektrycznego wystąpi efekt odwrotny, wywołany przyłożeniem elektrycznego potencjału do ciała — w efekcie ciało dozna odkształcenia. Ten odwrotny efekt został w 1881 r. przewidziany przez LIPPMANNA [5] na podstawie rozważań termodynamicznych i potwierdzony doświadczalnie przez braci CURIE 1881, [6].

Praktyczne zastosowania efektu piezoelektrycznego są dobrze znane, przede wszystkim w generacji fal ultradźwiękowych, w konwersji energii elektromagnetycznej na mechaniczną i odwrotnie, w prospekcji ciał o własnościach piezoelektrycznych itd. [7].

W niniejszym artykule przedstawimy kilka modeli matematycznych piezoelektryczności i piezo-termosprężystości. Rozważania nasze rozpoczniemy od przedstawienia klasycznego, kwazistatycznego modelu W. VOIGTA [1], przechodząc następnie do omówienia bardziej ogólnego przypadku, w którym dynamiczne elektromagnetyczne pole jest sprzężone z polem odkształcenia [16]. Następnie odstąpimy od założenia procesu adiabatycznego i rozpatrzymy kwazistyczny model termopiezoelektryczności. [2] [4].

Wreszcie rozpatrzmy bardzo ogólny model R. D. MINDLINA [3], w którym rozpatruje się wpływ gradientu polaryzacji elektrycznej na elektromechaniczne pole. Rozważania nasze kończy prezentacja dynamicznego zagadnienia termopiezoelektryczności z gradientem polaryzacji. [32]

2. Pole elektromagnetyczne

Rozważania nasze rozpoczniemy od podstaw elektromagnetycznych zagadnienia. Przedstawmy najpierw równania elektrodynamiki MAXWELLA [8]

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}+\dot{\boldsymbol{D}} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \varrho_e, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{2.4}$$

gdzie $\boldsymbol{H}$ jest wektorem pola magnetycznego, $\boldsymbol{E}$ jest wektorem pola elektrycznego, $\boldsymbol{B}$ — wektorem indukcji magnetycznej a $\boldsymbol{D}$ wektorem przesunięcia elektrycznego. $\boldsymbol{I}$ jest wektorem prądu przewodzenia a ϱ_e — ładunkiem elektrycznym.

Do równań Maxwella dodać należy związki konstytutywne

(2.5) $$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P},$$

(2.6) $$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}).$$

Tutaj $\boldsymbol{P}$ jest wektorem polaryzacji elektrycznej, $\boldsymbol{M}$ — wektorem magnetyzacji, ε_0, μ_0 oznaczają przenikalność elektryczną i magnetyczną.

Równaniom Maxwella można nadać inną równorzędną postać [8]

(2.7) $$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{D}}$$

(2.8) $$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

(2.9) $$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \dot{\boldsymbol{A}}$$

(2.10) $$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho_e$$

Posłużymy się tą postacią równań elektrodynamiki w celu uzyskania równań kwazistatycznych. W równaniach (2.7) - (2.10) wprowadzono potencjał skalarny φ i potencjał wektorowy $\boldsymbol{A}$.

Łatwo się przekonać, że z równań (2.1) - (2.4) otrzymuje się twierdzenie Poyntinga

(2.11) $$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U_e dV = - \int_A \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h} dA - \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{I} dV,$$

gdzie

$$U_e = \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{B}}, \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

Równanie (2.11) daje się interpretować fizykalnie jako bilans energii elektromagnetycznej. Skalar $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}$ przedstawia przepływ energii elektromagnetycznej przez powierzchnię A ciała do otaczającego go ośrodka. Wyrażenie $\dot{U}_\varepsilon = \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{B}}$ identyfikujemy jako przyrost energii elektromagnetycznej w czasie. Wreszcie $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{I}$ reprezentuje ciepło Joule'a. Wektor Poyntinga $\boldsymbol{h}$ daje się wyrazić przy pomocy potencjałów φ i $\boldsymbol{A}$ w sposób następujący

(2.12) $$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \varphi(\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{D}}) - \dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{H}$$

Dla piezoelektryków wprowadzamy te same uproszczenia co dla niemagnetyzujących się dielektryków

(2.13) $$\boldsymbol{I} = 0, \quad \boldsymbol{M} = 0, \quad \varrho_e = 0.$$

Dalszym uproszczeniem jest przyjęcie, że $\boldsymbol{A} \approx 0$. W tym przypadku uprości się bilans energii (2.11) do postaci

(2.14) $$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U_e dV = - \int_A n\varphi \dot{\boldsymbol{D}} dA = \int_V \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} dV, \quad \dot{U}_e = \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}$$

Z układu równań (2.5) - (2.10) pozostaną nam

(2.15) $$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}.$$

Mamy tu do czynienia z kwazistatycznym polem elektrycznym

(2.16) $$\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Uproszczenie $\dot{A} \approx 0$ albo $|A| \ll (\operatorname{grad}\varphi)$ jest słuszne gdy rozważymy długości fal bliskie długościom fal sprężystych. Omówienie szczegółowe i teoretyczne uzasadnienie uproszczenia $\dot{A} \approx 0$ znajdzie czytelnik w cennej pracy H. F. TIERSTEN'A [9].

3. Klasyczna teoria piezoelektryczności W. VOIGTA [1]

Załóżmy, że ciało dozna odkształcenia wskutek działania obciążeń zewnętrznych i pola elektromagnetycznego, które to przyczyny zmieniają się w czasie. Załóżmy, że w ciele brak źródeł ciepła i przewodnictwa cieplnego (proces adiabatyczny). Zastosujemy do dowolnego obszaru V ciała ograniczonego powierzchnią A, zasadę zachowania energii

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\varrho v_i v_i + U\right) dV = \int_V X_i v_i dV + \int_A p_i v_i dA + \int_V E_i \dot{D}_i dV \tag{3.1}$$

Tutaj ϱ jest gęstością, $v_i = \dot{u}_i$ pochodną czasową przemieszczenia, X_i składową sił masowych, $p_i = \sigma_{ji} n_j$ siłą kontaktową, σ_{ij} tensorem naprężenia a n_i składową wektora normalnej do powierzchni A. Dalej $U = U_m + U_e$ jest energią wewnętrzną (mechaniczną i elektryczną).

Przekształcając równanie (3.1) i wykorzystując równanie ruchu

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \varrho \ddot{u}_i, \tag{3.2}$$

otrzymamy

$$\int_V \dot{U} dV = \int_V (\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i) dV.$$

co prowadzi dla dowolnej objętości V do lokalnego związku

$$\dot{U} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i. \tag{3.3}$$

Ponieważ $U \equiv U(\varepsilon_{ij}, D_i)$, to słuszne jest równanie

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(E_i - \frac{\partial U}{\partial D_i}\right)\dot{D}_i = 0. \tag{3.4}$$

Równanie to winno być spełnione dla dowolnych wartości $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{D}_i$. Stąd wynika, że

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E_i = \frac{\partial U}{\partial D_i}. \tag{3.5}$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie operować entalpią elektryczną:

$$H = U - E_i D_i. \tag{3.6}$$

Eliminując $\dot{U}$ z równania (3.3) i (3.6) dochodzimy do równania

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} - \left(D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i}\right)\dot{E}_i = 0. \tag{3.7}$$

Równanie to winno być spełnione dla dowolnych wartości $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{E}_i$, zatem

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}. \tag{3.8}$$

Rozwińmy entalpię elektryczną $H(\varepsilon_{ij}, E_i)$ w szereg Maclaurina w otoczeniu stanu naturalnego ($\varepsilon_{ij} = 0$, $E_i = 0$) i pomińmy człony wyższe od stopnia drugiego.

$$H(\varepsilon_{ij}, E_i) = \frac{1}{2} c^E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - e_{kij}\varepsilon_{ij}E_k - \frac{1}{2}\epsilon^\varepsilon_{ij}E_iE_j \tag{3.9}$$

Tutaj c^E_{ijkl} jest sztywnością sprężystą przy $E_i = \text{const.}$, $\epsilon^\varepsilon_{ij}$ — jest stałą przenikalności dielektrycznej przy $\varepsilon_{ij} = \text{const.}$, wreszcie e_{kij} jest stałą piezoelektryczną. Na podstawie rozważań termodynamicznych oraz ze względu na symetrię tensorów σ_{ij} i ε_{ij} otrzymamy

$$c_{ijkl} = c_{klij}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \tag{3.10}$$

W przypadku ogólnym kryształu trójskośnego mamy 21 stałych sprężystych c_{ijkl}. 18 stałych piezoelektrycznych e_{kij} i 6 stałych przenikalności elektrycznej ε_{ij}. Ponieważ w przypadku kryształów centrosymetrycznych znika tensor polarny, to w ciałach centrosymetrycznych nie wystąpi efekt piezoelektryczny.

Zważywszy na równania (3.8) i wyrażenie (3.9) otrzymujemy następujące związki konstytutywne

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \tag{3.11}$$

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k \tag{3.12}$$

Wstawmy związki konstytutywne (3.11) (3.12) do równań różniczkowych rozpatrywanego pola sprzężonego

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \varrho\ddot{u}_i, \quad D_{i,i} = 0. \tag{3.13}$$

W rezultacie tego postępowania otrzymamy układ czterech równań, w których jako nieznane funkcje wystąpią trzy składowe wektora przemieszczenia $\boldsymbol{u}$ oraz potencjał elektryczny φ.

$$c_{ijkl}u_{k,lj} + e_{kij}\varphi_{,kj} + \chi_i = \varrho\ddot{u}_i, \tag{3.14}$$

$$e_{ikl}u_{k,li} - \epsilon_{ik}\varphi_{,ik} = 0. \tag{3.15}$$

Układ równań (3.14) (3.15) winien być uzupełniony warunkami brzegowymi, mechanicznymi i elektrycznymi. Te ostatnie dane są w postaci

$$\varphi = \Phi(x, t) \quad \text{na} \quad \partial B_1 \qquad D_kn_k = -\sigma \quad \text{na} \quad \partial B_2, \tag{3.16}$$

gdzie

$$\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2, \quad \partial B_1 \cap \partial B_2.$$

Tutaj σ jest ładunkiem powierzchniowym. Znając rozwiązania (u_i, φ) równań (3.14) (3.15) wyznaczymy wektor pola elektrycznego $E_i = -\varphi_{,i}$ a z równań konstytutywnych (3.11) (3.12) naprężenia σ_{ij} i składowe wektora przesunięcia elektrycznego D_i. Polaryzację elektryczną P_i wyznaczymy ze związku

$$P_i = D_i - \varepsilon_0 E_i \tag{3.17}$$

Zważywszy na (3.6) i (3.9) przedstawimy wreszcie energię wewnętrzną U w postaci

$$U = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_iE_j \tag{3.18}$$

Ponieważ U jest nieujemnym skalarem, to prawa strona równania (3.18) winna być formą kwadratową dodatnio określoną, co zabezpiecza stabilność rozwiązania.

Przedstawiona tu w sposób zwarty klasyczna teoria piezoelektryczności W. Voigta stanowi powiązanie elastodynamiki sprężystego ciała anizotropowego z quasistatycznym polem elektrycznym. Z teorii tej wynika, że efekty piezoelektryczne nie występują w kryształach o cechach centrosymetrycznych.

Poniżej podamy najważniejsze twierdzenia ogólne. Przede wszystkim podamy rozszerzoną na piezoelektryczność zasadę prac wirtualnych, przy wariacji stanu przemieszczenia i przesunięcia elektrycznego. Oto postać tego twierdzenia [10]

$$\delta(\mathscr{W}+\mathscr{E}) = \int_B (X_i-\varrho\ddot{u}_i)\delta u_i dV + \int_{\partial B} (p_i\delta u_i-\varphi\delta D_k n_k)dA, \tag{3.19}$$

gdzie

$$\mathscr{W} = \frac{1}{2}c_{ijkl}\int \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}dV, \qquad \mathscr{E} = \frac{1}{2}\in_{ij}\int E_iE_jdV.$$

W przypadku szczególnym rzeczywistych przemieszczeń i przesunięć elektrycznych, otrzymamy z (3.19) podstawowe równanie energetyczne

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{W}+\mathscr{E}+\mathscr{K}) = \int_B X_iv_idV + \int_{\partial B} (p_iv_i-\varphi\dot{D}_kn_k)dA, \quad \mathscr{K} = \frac{1}{2}\varrho\int_B v_iv_idV \tag{3.20}$$

Równanie to może posłużyć do wyprowadzenia twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań układu równań (3.14) (3.15).

Twierdzenie Hamiltona, uogólnione na piezoelektryczność ma postać [10]

$$\delta\int_{t_2}^{t_1} (\mathscr{K}-\Pi)dt = 0, \tag{3.21}$$

gdzie

$$\Pi = \int_B (H-X_iu_i)dV - \int_{\partial B} (p_iu_i-\sigma\varphi)dA. \tag{3.22}$$

Twierdzenie o wzajemności prac przedstawia się w postaci splotowej jak następuje

$$\int_B X_i*u_i'dV + \int_{\partial B} (p_i*u_i'+D_k*\varphi'n_k)dA = \int_B X_i'*u_idV + \int_{\partial B} (p_i'*u_i+D_k'*\varphi n_k)dA. \tag{3.23}$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$X_i*u_i' = \int_0^t X_i(x, t-\tau)u_i'(x, \tau)d\tau \text{ itd.}$$

Dotąd rozwiązano szereg problemów szczegółowych, odnoszących się do propagacji fal powierzchniowych Rayleigha, Love'a i Stoneleya i to dla rozmaitych klas kryształów [11] - [15] zagadnienia kwazistatycznego.

4. Sprzężenie fal sprężystych i elektromagnetycznych

W poprzednich rozważaniach mieliśmy do czynienia z oddziaływaniem kwazistatycznego pola z ruchem ciała sprężystego. Obecnie odrzucimy to zawężenie, rozpatrując zagadnienie dynamiczne, tak sprężyste jak i elektrodynamiczne.

Rozważmy układ równań elektrodynamiki Maxwella, zakładając że $\boldsymbol{M} = 0$, $\varrho_\varepsilon = 0$. Mamy

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}+\dot{\boldsymbol{D}} \tag{4.1}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0\dot{\boldsymbol{H}} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0} \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \tag{4.4}$$

Dodajmy do równań (4.1) - (4.8) związki konstytutywne

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{I} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{4.7}$$

Wykonując na równaniu (4.2) operację rotacji oraz wykorzystując równanie (4.1) oraz (4.6) dochodzimy do równania falowego

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E}+\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2}, \tag{4.8}$$

Wyraźmy teraz wektor $\boldsymbol{D}$ przy pomocy związków konstytutywnych (3.12) dla zagadnienia kwazistatycznego. Otrzymamy równanie

$$E_{i,jj}-E_{j,ji}+\mu_0\sigma\frac{\partial E_i}{\partial t} = -\mu_0\left(e_{ikl}\frac{\partial^2\varepsilon_{kl}}{\partial t^2}+\epsilon_{ik}\frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2}\right). \tag{4.9}$$

gdzie

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})$$

W tych trzech równaniach różniczkowych funkcjami nieznanymi są u_i oraz E_i. Pozostałe trzy równania dostarczą nam równania ruchu

$$c_{ijkl}u_{k,lj}-e_{klj}E_{k,j}+X_i = \varrho\ddot{u}_i \tag{4.10}$$

Otrzymaliśmy zatem sześć równań różniczkowych z sześcioma nieznanymi funkcjami u_i, E_i. Rozpatrywany tu problem i jego rozwiązanie pochodzi od J. J. KAYME [16].

Przykłady wykonane przez J. J. Kayme dla kryształów klasy 42 m (dla ADP — amonium dihydrogen phosphate) wskazują na dyspersje i tłumienie fali płaskiej. Tłumienie to znika gdy $\sigma \to 0$, jednak pozostaje dyspersja fal. Widocznym też staje się z rozwiązanego przykładu, że odkształcenie ciała nieznacznie tylko modyfikuje fale elektromagnetyczne.

5. Termopiezoelektryczność

W poprzednich punktach założyliśmy, że proces termodynamiczny jest adiabatyczny. Teraz odrzucimy to ograniczenie. Oznaczmy przez q wektor przepływu ciepła. Niech we wnętrzu ciała działa źródło ciepła o intensywności w. W wyniku działania ogrzania zewnętrznego i działania źródeł ciepła nastąpi przyrost temperatury Θ, równy różnicy $T-T_0$, gdzie T jest temperaturą absolutną a T_0 jest temperaturą stanu naturalnego, w którym brak naprężeń i odkształceń.

Poniżej przedstawiamy bilans energii [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varrho v_i v_i+U\right)dV = \int_V (X_i v_i+W)dV+\int_A (p_i v_i-q_i n_i)dA+\int_V E_i\dot{D}_i dV \tag{5.1}$$

oraz nierówność Clausiusa-Duhema

$$\dot{S}+\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i}-\frac{W}{T}\geqslant 0 \tag{5.2}$$

W bilansie energii (5.1) dostrzegamy (w porównaniu z wyrażeniem (3.1)) człony wyrażające moc niemechaniczną, przepływ ciepła poprzez powierzchnię ciała oraz energię generowaną wewnątrz ciała. W nierówności Clausiusa-Duhema (5.2) przez S oznaczono entropię. Przekształcając wyrażenie (5.1) w analogiczny sposób jak to zrobiono z (3.1), wprowadzając energię swobodną $F = U-ST$ oraz entalpię elektryczną $H = F-D_iF_i$ dochodzimy do następujących związków

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}},\qquad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i},\qquad S = -\frac{\partial H}{\partial T},\qquad -\frac{q_i T_i}{T}>0 \tag{5.3}$$

Ostatnia nierówność jest spełniona przez prawo Fouriera przewodnictwa cieplnego

$$q_i = -k_{ij}T_{,j} \tag{5.4}$$

Rozwijając entalpię w szereg Taylora w otoczeniu stanu naturalnego

$$H = \frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-e_{kij}\varepsilon_{ij}E_k-\frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_iE_j-\gamma_{ij}\varepsilon_{ij}\Theta-g_iE_i\Theta-\frac{c_\varepsilon}{2T_0}\Theta^2, \tag{5.5}$$

i wykorzystując związki (5.3) dochodzimy do następujących związków konstytutywnych

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\gamma_{ij}\Theta-e_{kij}E_k, \tag{5.6}$$

$$S = \gamma_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\Theta+g_iE_i, \tag{5.7}$$

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl}+g_i\Theta+\epsilon_{ik}E_k, \tag{5.8}$$

Równanie (5.6) można traktować jako związek Duhamela-Neumanna, rozszerzony na piezoelektryczność. Mamy tu 10 nowych stałych: γ_{ij}, g_i, c_ε. Stała c_ε jest ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu.

Wstawmy związki konstytutywne (5.6) do równań ruchu, a związek (5.8) do równań Gaussa ($D_{i,i} = 0$). Otrzymujemy równania

$$c_{ijkl}u_{k,lj}-e_{kij}\varphi_{,kj}-\gamma_{ij}\Theta_{,j}+X_i = \varrho\ddot{u}_i, \tag{5.9}$$

$$e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ik}\varphi_{,ki}+g_i\Theta_{,i} = 0. \tag{5.10}$$

Powyższe równania należy uzupełnić równaniem przewodnictwa cieplnego. Otrzymamy je przy wykorzystaniu bilansu entropii

$$T\dot{S} = -q_{i,i}+W \tag{5.11}$$

Biorąc pod uwagę związek konstytutywny (5.7), prawo Fouriera (5.4) oraz zakładając, że $\left|\frac{\Theta}{T_0}\right| \ll 1$ dochodzimy do liniowego równania przewodnictwa cieplnego

$$k_{ij}\Theta_{,ij}-c_{\varepsilon}\dot{\Theta}-T_0(\gamma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-g_i\dot{\varphi}_{,i}) = -W. \tag{5.12}$$

Równania (5.9) oraz równanie (5.12) stanowią komplet równań termopiezoelektryczności. Obmyślono szereg ogólnych twierdzeń termosprężystości, takich jak twierdzenie energetyczne, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań [17] zasadę prac wirtualnych, zasadę Hamiltona [18], twierdzenie o wzajemności prac [19]. Dotąd rozwiązano tylko nieliczne zagadnienia szczegółowe, dotyczące propagacji fal [20]. Pole elektromagnetyczne występujące w teorii R. D. MINDLINA [4] jest polem kwazistatycznym. Łatwo jednak uzyskać uogólnienie tej teorii przy rozpatrzeniu dynamicznego pola elektromagnetycznego.

W tym przypadku do dyspozycji mamy układ równań (przy $I = 0$)

$$E_{i,jj}-E_{j,ji} = -\mu_0\ddot{D}_i, \tag{5.13}$$

$$\sigma_{ji,j}+X_i = \varrho\ddot{u}_i, \tag{5.14}$$

$$k_{ij}\Theta_{,ij}-c_{\varepsilon}\dot{\Theta}-T_0(\gamma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+g_i\dot{E}_i) = -W. \tag{5.15}$$

Do tych równań należy wprowadzić związki konstytutywne (5.6) i (5.8). Zauważmy, że wskutek naprężenia termicznego wszystkie fale są tłumione i ulegają dyspersji.

6. Klasyczna teoria piezoelektryczności w ujęciu R. A. Toupina

Równania różniczkowe piezoelektryczności Voigta otrzymać można również jako szczególny przypadek liniowej teorii dielektryków R. A. TOUPINA [24].

Rozdzielmy energię wewnętrzną na dwie części, na część pochodzącą od odkształcenia i polaryzacji oraz na energię pochodzącą od pola elektrycznego Maxwella

$$U = U^K(\varepsilon_{ij}, P_i)+\frac{1}{2}\varepsilon_0\varphi_{,i}\varphi_{,i} \tag{6.1}$$

Zważywszy na (6.1) wyrazimy entalpię elektryczną w następującej postaci

$$H' = U-D_iE_i = U^L(\varepsilon_{ij}, P_i)-\frac{1}{2}\varepsilon_0\varphi_{,i}\varphi_{,i}+\varphi_{,i}P_i \tag{6.2}$$

Wykorzystajmy twierdzenie wariacyjne R. A. TOUPINA [24]

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left\{\int_{B^*}(\delta K-\delta H')dV+\int_B(X_i\delta u_i+E_i^0\delta P_i)dV+\int_{\partial B}p_i\delta u_i dA\right\} = 0. \tag{6.3}$$

Tutaj B jest obszarem ciała a $B^* = B\cup B'$, gdzie B' jest obszarem zewnętrza. E_i^0 jest zewnętrznym polem elektrycznym. W twierdzeniu (6.3) wariacji doznają przemieszczenia, polaryzacja elektryczna oraz potencjał elektryczny. Zauważmy, że $U^L = U^L(\varepsilon_{ij}, P_i)$. Korzystając z definicji naprężenia σ_{ij} i lokalnej siły elektrycznej E_i^L, gdzie

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E_i^L = -\frac{\partial U^L}{\partial P_i} \tag{6.4}$$

przedstawimy wirtualny przyrost entalpii elektrycznej w postaci

$$\delta H = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + (\varphi_{,i} - E_i^L)\delta P_i - \varepsilon_0\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i} + P_i\delta\varphi_{,i} \tag{6.5}$$

Wstawiając (6.5) do (6.3) i wykonując przepisane działania, dochodzimy do wyrażenia

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \Big\{ \int_B \Big[\sigma_{ji,j} + X_i - \varrho\ddot{u}_i)\delta u_i + (E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0)\delta P_i + (-\varepsilon_0\varphi_{,ii} + P_{i,i})\delta\varphi + \Big] dv + \tag{6.6}$$

$$- \int_{B'} \varepsilon_0\varphi_{,ii}\delta\varphi dV + \int_{\partial B} [(p_i - \sigma_{ji}n_j)\delta u_i + n_i(\varepsilon_0|\varphi_{,i}| - P_i\delta\varphi] dA \Big\} = 0.$$

Ze względu na dowolność wariacji δu_i, δP_i, $\delta\varphi$ otrzymamy następujący układ równań różniczkowych

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ji,j} + X_i = \varrho\ddot{u}_i && (6.7)\\ &E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0 = 0 && (6.8)\\ &-\varepsilon_0\varphi_{,ii} + P_{i,i} = 0 && (6.9)\end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad x \in B$$

$$\varphi_{,ii} = 0 \quad \text{dla} \quad x \in B' \tag{6.10}$$

z warunkami brzegowymi

$$\sigma_{ji}n_j = p_i \tag{6.11}$$

$$(-\varepsilon_0|\varphi_{,i}| + P_i)n_i = 0 \tag{6.12}$$

Równanie (6.8) nie występowało w klasycznej teorii W. Voigta. Jest to tzw. bilans sił intermolekularnych wprowadzony przez R. A. Toupina na podstawie rozważań nad równowagą sił elektrycznych.

Przyjmijmy energię $U^L \equiv U^L(\varepsilon_{ij}, P_i)$ w postaci formy kwadratowej, dodatnio zdefiniowanej

$$U^L = \frac{1}{2}c^P_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}a^\varepsilon_{ij}P_iP_j + f_{kij}\varepsilon_{ij}P_k \tag{6.13}$$

Z wykorzystania związków (6.4) mamy

$$\sigma_{ij} = c^P_{ijkl}\varepsilon_{kl} + f_{kij}P_k \tag{6.14}$$

$$\varepsilon_i^L = f_{ikl}\varepsilon_{kl} + a^\varepsilon_{ik}P_k \tag{6.15}$$

R. D. MINDLIN [23] wykazał, że przedstawiona tu droga postępowania prowadzi do równań różniczkowych, identycznych z wyprowadzonymi przez W. Voigta.

7. Gradientowa teoria dielektryków R. D. Mindlina

Badania eksperymentalne wykazują, że efekt piezoelektryczny wystąpić może również w centrosymetrycznych kryształach. Teorię uwzględniającą wpływ gradientu polaryzacji opracował R. D. MINDLIN [3], [23]. Głównym osiągnięciem tej teorii jest wprowadzenie nowego efektu elektryczno-mechanicznego, występującego tak w centrosymetrycznych jak i niecentrosymetrycznych kryształach.

Punktem wyjścia naszych rozważań jest wyrażenie na entalpię elektryczną z punktu 6, z tym jednak że U^L jest funkcją odkształcenia ε_{ij}, polaryzacji P_i oraz gradientu polaryzacji P_{ij}.

$$H = U^L(\varepsilon_{ij}, P_i, P_{i,j}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varphi_{,i}\varphi_{,i} + \varphi_{,i}P_i \tag{7.1}$$

Wstawiając powyższe do zasady Hamiltona w ujęciu Toupina ((6.3) z punktu 6), dochodzimy po wykonaniu przepisanych operacji i wprowadzeniu tensora

$$E_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial P_{j,i}}, \tag{7.2}$$

do następującego wyrażenia

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_B [(\sigma_{ji,j}+X_i-\varrho\ddot{u}_i)\delta u_i+(E_{ji,j}+E_i^L-\varphi_{,i}+E_i^0)\delta P_i+(-\varepsilon_0\varphi_{,ii}+P_{i,i})\delta\varphi]dV+ \tag{7.3}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int_B \varepsilon_0\varphi_{i,i}\delta\varphi dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_B [(p_i-\sigma_{ji}n_j)\delta u_i - E_{ji}n_i\delta P_i + (\varepsilon_0|\varphi_{,i}|-P_i)n_i\delta\varphi]dA = 0.$$

Zauważmy, że występują tu dwa nowe człony: $E_{ji,j}\delta P_i$ w całce objętościowej oraz $E_{ji}n_j\ \delta P_i$ w całce powierzchniowej. Ze względu na dowolność wielkości wirtualnych δu_i, δP_i, $\delta\varphi$ otrzymamy następujące równania różniczkowe dielektryków

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ji,j}+X_i = \varrho\ddot{u}_i, && (7.5)\\ &E_{ji,j}+E_i^L-\varphi_{,j}+E_i^0 = 0, && (7.4)\\ &-\varepsilon_0\varphi_{,ii}+P_{i,i} = 0, && (7.6)\end{aligned}\right| \quad \text{dla} \quad x \in B$$

$$\varphi_{,ii} = 0, \quad \text{dla} \quad x \in B' \tag{7.7}$$

wraz z naturalnymi warunkami brzegowymi

$$p_i - \sigma_{ji}n_j = 0, \tag{7.8}$$

$$E_{ji}n_j = 0, \tag{7.9}$$

$$\varepsilon_0|\varphi_{,i}|-P_i)n_i = 0, \tag{7.10}$$

W stosunku do teorii klasycznej zmianie uległo równanie (7.5), które zostało rozszerzone o człon $E_{ji,j}$. Doszedł również nowy warunek brzegowy (7.9).

Obok warunku brzegowego (7.8) przyjąć możemy warunek brzegowy w przemieszczeniach. Podobnie, obok warunku (7.8) można przyjąć warunek dla polaryzacji. Wreszcie obok warunku (7.10) przepisać można potencjał φ na brzegu.

Rozwińmy U^L w otoczeniu stanu naturalnego, w którym odkształcenie i polaryzacja są równe zeru a tensor E_{ij} przyjmuje wartość b_{ij}^0

$$U^L = b_{ij}^0 P_{j,i} + \frac{1}{2}a_{ij}^{\varepsilon,G}P_iP_j + \frac{1}{2}b_{ijkl}^{\varepsilon,P}P_{j,i}P_{l,k} + \frac{1}{2}c_{ijkl}^{P,G}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \tag{7.11}$$

$$+d_{ijkl}^P P_{j,i}\varepsilon_{kl} + f_{ijk}^G P_i\varepsilon_{jk} + j_{ijk}^\varepsilon P_iP_{k,j},$$

Zważywszy na związki

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E_i^L = -\frac{\partial U^k}{\partial P_i}, \quad E_{ij} = \frac{\partial U^L}{\partial P_{j,i}}, \tag{7.12}$$

dochodzimy do równań konstytutywnych

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + f_{kij}P_k + d_{klij}P_{l,k}, \tag{7.13}$$

$$-E_j^L = f_{jkl}\varepsilon_{kl} + a_{jk}P_k + j_{jkl}P_{l,k}, \tag{7.14}$$

$$E_{ij} = d_{ijkl}\varepsilon_{kl} + j_{klj}P_k + b_{ijkl}P_{l,k} + b_{ij}^0. \tag{7.15}$$

Wstawienie związków (7.13) - (7.15) do równań (7.4) - (7.6) prowadzi do układu siedmiu równań różniczkowych, w których jako wielkości nieznane wystąpią funkcje u_i, P_i, φ. Zauważmy, że wprowadzenie gradientu polaryzacji nie podwyższa rzędu równań różniczkowych.

Godnym uwagi jest fakt, że sprzężenie elektromechaniczne wystąpi w przypadku ciał centrosymetrycznych. W tym szczególnym przypadku jest $f_{ijk} = 0, j_{ijk} = 0$ gdyż nieparzyste tensory są równe zeru dla ciał centrosymetrycznych, podczas gdy stałe d_{ijkl} nie znikają. Ze związków (7.13) i (7.15) staje się widoczne, że stałe d_{ijkl} odgrywają rolę sprzężeń między polem elektrycznym i mechanicznym.

W przypadku ciała izotropowego równania konstytutywne przyjmą postać

$$\sigma_{ij} = c_{12}u_{k,k}\delta_{ij} + c_{44}(u_{i,j}+u_{j,i}) + d_{12}P_{k,k}\delta_{ij} + d_{44}(P_{i,j}+P_{j,i}). \tag{7.16}$$

$$E_{ij} = d_{12}u_{k,k}\delta_{ij} + d_{44}(u_{i,j}+u_{j,i}) + b_{12}P_{k,k}\delta_{ij} + b_{44}(P_{j,i}+P_{i,j}) + \\ + b_{77}(P_{j,i}-P_{i,j}) + b^0\delta_{ij}, \tag{7.17}$$

$$E_i^L = -aP_i \tag{7.18}$$

Podstawienie tych związków do równań różniczkowych (7.16) - (7.18) prowadzi do następującego układu trzech sprzężonych równań różniczkowych

$$c_{44}\nabla^2 u + (c_{12}+c_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + d_{44}\nabla^2\boldsymbol{P} + (d_{12}+d_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{X} = \varrho\ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{7.19}$$

$$d_{44}\nabla^2\boldsymbol{u} + (d_{12}+d_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + (b_{44}+b_{77})\nabla^2\boldsymbol{P} + \\ + (b_{12}+b_{44}-b_{77})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} - a\boldsymbol{P} - \operatorname{grad}\varphi + \boldsymbol{E}^0 = 0, \tag{7.20}$$

$$-\varepsilon_0\nabla^2\varphi + \operatorname{div}\boldsymbol{P} = \varrho_e \quad \text{dla} \quad x \in B, \tag{7.21}$$

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{x} \in B'. \tag{7.22}$$

Do równań różniczkowych (7.19) - (7.22) dochodzą warunki brzegowe (7.8) - (7.10). Układ równań (7.19) - (7.22) jest złożony i trudny do rozwiązania w tej postaci.

W przypadku nieskończonego obszaru sprężystego znaczne uproszczenie równań otrzymamy przez dekompozycję występujących w nich wektorów na część potencjalną i część solenoidalną.

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\psi + \operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{P} = \operatorname{grad}\chi + \operatorname{rot}\boldsymbol{K}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{K} = 0, \tag{7.23}$$

$$\boldsymbol{X} = \varrho(\operatorname{grad}\vartheta + \operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{E}^0 = \operatorname{grad}\tau + \operatorname{rot}\xi, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\eta} = 0, \quad \operatorname{div}\xi = 0. \tag{7.24}$$

Wstawienie dekompozycji wektorów (7.23) - (7.24) do równań różniczkowych (7.19) - (7.22) sprowadza je do dwu niezależnych od siebie układów równań

$$\begin{aligned} c_{11}\,\square_1^2\psi + d_{11}\nabla^2\chi &= -\varrho\vartheta, \\ d_{11}\nabla^2\psi + (b_{11}\nabla^2 - a)\chi - \varphi &= -\tau, \\ \nabla^2\chi - \varepsilon_0\nabla^2\varphi &= \varrho_e, \end{aligned} \tag{7.25}$$

oraz

$$\left\{\begin{aligned} &c_{44}\Box_2^2 H+d_{44}\nabla^2 K = -\varrho\eta,\\ &d_{44}\nabla^2 H+(\hat{b}_{44}\nabla^2-a)K = \xi.\end{aligned}\right. \tag{7.26}$$

Tutaj wprowadziliśmy oznaczenia

$$c_{11} = c_{12}+2c_{44}, \quad d_{11} = d_{12}+2d_{44}, \quad b_{11} = b_{12}+2b_{44}, \quad \hat{b}_{44} = b_{44}+b_{77}$$

$$\Box_1^2 = \nabla^2-\frac{1}{c_1^2}\partial_t^2, \quad \Box_2^2 = \nabla^2-\frac{1}{c_2^2}\partial_t^2, \quad c_1 = \left(\frac{c_{11}}{\varrho}\right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{c_{44}}{\zeta}\right)^{1/2}.$$

Rozpatrzmy przypadek szczególny podłużnej fal płaskiej, propagującej się w nieskończonej przestrzeni sprężystej w kierunku osi x_1. W tym przypadku jest

$$\psi \equiv \psi(x_1, t), \quad \varphi \equiv \varphi(x_1, t), \quad \chi \equiv \chi(x_1, t), \quad K = 0, \quad H = 0 \tag{7.27}$$

Pozostają nam równania

$$\left(l_1^2\partial_1^4-\left(1+\frac{b_{11}}{\hat{a}c_1^2}\partial_t^2\right)\partial_1^2+\frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)(\psi, \chi) = 0, \quad \varphi = \varepsilon_0^{-1}\chi$$

$$\hat{a} = a+\varepsilon_0^{-1} \quad l_1^2 = \frac{c_{11}d_{11}-d_{12}^2}{c_{11}\hat{a}} > 0 \tag{7.28}$$

Dla fali harmonicznie zmiennej w czasie jest

$$(\psi, \chi, \varphi) = (\psi^0, \chi^0, \varphi^0)\exp[-i\omega t+ikx_1]. \tag{7.29}$$

Tutaj ψ^0, χ^0, φ^0 są stałymi (amplitudami) a $v = \omega/k$ jest prędkością fazową. Wstawiając (7.29) do (7.28) otrzymamy równanie charakterystyczne

$$l_1^2k^4+k^2(1-\eta)-\sigma_1^2 = 0, \quad \eta = \frac{\omega^2 b_{11}}{\hat{a}c_{11}}, \quad \sigma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \tag{7.30}$$

z którego wywodzą się cztery pierwiastki

$$k_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{l_1\sqrt{2}}\sqrt{(1-\eta)\pm\sqrt{(1-\eta)^2+4\sigma_1^2l_1^2}}. \tag{7.31}$$

Interesują nas jedynie pierwiastki rzeczywiste, gdyż tylko te prowadzą do rzeczywistych prędkości fazowych

$$k_{1,2} = \pm k, \; k_{1,2} = \frac{1}{l_1\sqrt{2}}\sqrt{1-\eta+\sqrt{(1-\eta)^2+4\sigma_1^2l_1^2}}. \tag{7.32}$$

W rezultacie otrzymamy fale

$$(\psi, \chi) = (\psi_+^0, \chi_+^0)\exp[-i\omega t+ikx_1]+(\psi_-^0, \chi_-^0)\exp[-i\omega t-ikx]_1 \tag{7.33}$$

gdzie $v = \omega/k$. Zauważmy, że $k = k(\omega)$, co wskazuje na to, że fale ulegają dyspersji.

Dotąd rozwiązano nieliczne zagadnienia dynamiczne, przede wszystkim jednowymiarowe. [26] [27] [29].

Wróćmy do wyrażenia dla energii wewnętrznej. R. D. Mindlin wykazał, że słuszny jest związek

$$\int_{B^*} U dV = \frac{1}{2}\int_B (x_i u_i+E_i^0 P_i)dV+\frac{1}{2}\int_{\partial B}\{(\sigma_{ji}u_i+E_{ji}P_i)n_j+ \\ -(-\varepsilon_0|\varphi_{,i}|+P_i x_i+b_{ij}^0 P_j)n_i\}dA. \tag{7.34}$$

Załóżmy teraz, że brak jest sił masowych i zewnętrznego pola elektrycznego ($X_i = 0$, $E_i^o = 0$) oraz że warunki brzegowe na powierzchni ∂B są jednorodne

$$\sigma_{ji} n_j = 0, \quad E_{ji} n_j = 0, \quad (-\varepsilon_0 |\varphi_{,i}| + P_i) n_i = 0. \tag{7.35}$$

Wtedy z równania (7.34) pozostaje nam

$$\int_{B^*} U dV = \frac{1}{2} \int_{\partial B} n_i b_{ij}^0 P_j dA. \tag{7.36}$$

Jest to tzw. energia deformacji i polaryzacji.

Rozpatrzmy prosty przykład zagadnienia jednowymiarowego odnoszącego się do półprzestrzeni sprężystej $x_1 \geqslant 0$. Rozwiążmy jednorodny układ równań różniczkowych (z równań (7.19 - (7.21))

$$\begin{cases} c_{11} \partial_1^2 u_1 + d_{11} \partial_1^2 P_1 = 0, \\ d_{11} \partial_1^2 u_1 + b_{11} \partial_1^2 P_1 - a P_1 - \partial_1 \varphi = 0, \\ -\varepsilon_0 \partial_1^2 \varphi + \partial_1 P_1 = 0, \end{cases} \tag{7.37}$$

który rozwiązać należy przy uwzględnieniu jednorodnych warunków brzegowych

$$\begin{cases} \sigma_{11} = c_{11} \partial_1 u_1 + d_{11} \partial_1 P_1 = 0, \\ E_{11} = d_{11} \partial_1 u_1 + b_{11} \partial_1 P_1 + b_0 = 0, \\ \varepsilon_0 (\partial_1 \varphi^+ - \partial_1 \varphi^-) + P_1 = 0, \quad \text{dla} \quad x_1 = 0, \end{cases} \tag{7.38}$$

oraz

$$u_1 \to 0, \quad P_1 \to 0, \quad \varphi \to 0 \quad \text{dla} \quad x_1 \to \infty \tag{7.39}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia w półprzestrzeni sprężystej ma postać

$$u_1 = u_1^0 e^{-x_1/l_1}, \quad P_1 = P_1^0 e^{-x_1/l_1}, \quad \varphi = \varphi^0 e^{-x_1/l_1}, \tag{7.40}$$

gdzie

$$u_1^0 = -\frac{b_0 d_{11}}{l_1 \hat{a}}, \quad P_1^0 = \frac{b_0}{l_1 \hat{a}}, \quad \varphi^0 = -\frac{\varepsilon_0^{-1} b_0}{\hat{a}}.$$

Wielkości P_1, φ i u_1 zanikają wykładniczo wewnątrz ciała. Energia deformacji i polaryzacji przyjmie wartość

$$U = -\frac{b_0^2}{2 l_1 \hat{a}} < 0, \tag{7.41}$$

W rozpatrywanym tu przypadku braku sił masowych i zewnętrznego pola elektrycznego oraz przy uwzględnieniu jednorodnych warunków brzegowych, całkowita energia wewnętrzna wyraża się całką powierzchniową (7.36). Wyrażenie to jest równe zeru, gdy przyjmiemy $b_0 = 0$. Wyrażenie (7.36) nazywamy energią powierzchniową deformacji i polaryzacji.

Na podstawie rozważań Tosi oraz Gemmera, Mac Rae i Gazisa [38] [39] traktować można energię deformacji i polaryzacji (7.36) jako tę część energii, którą dodać należy do energii więzów międzyatomowych aby otrzymać energię potrzebną do rozdzielenia materiału wzdłuż powierzchni S.

Zauważmy, że w wyrażeniu na entalpię pominęliśmy człon $c_{ij}^0 \varepsilon_{ij}$. Jednak wprowadzenie wstępnego odkształcenia nie zmieni stanu rzeczy. Wprowadzenie członu $\varepsilon_{ij}c_{ij}^0$ prowadzi do jednorodnego stanu naprężenia, które w ciele ograniczonym można usunąć przez nałożenie jednorodnego stanu odkształcenia.

Gradientowa teoria piezoelektryczności wyjaśnia również anomalie występujące w cienkich błonach sprężystych (efekt Meada [21] [22]), w pomiarze wielkości C^{-1} (C — pojemność elektryczna).

W ostatniej dekadzie gradientowa teoria piezoelektryczności R. D. Mindlina doznała znacznego rozwoju, szczególnie w zakresie zagadnień ustalonych. Uzyskano funkcje Greena dla wielkości u_i, P_i, φ w nieskończonej przestrzeni sprężystej. Obmyślono funkcje naprężeń, uogólniając funkcje Galerkina oraz Papkowicza-Neubera na zagadnienia piezoelektryczności. Rozpatrzono zagadnienie działania punktowego ładunku elektrycznego, umieszczonego w półprzestrzeni sprężystej. Wiele uwagi poświęcono badaniom energii deformacji i polaryzacji [25] - [29].

W ostatnich latach sporo uwagi poświęcono propagacji fal sprężystych w ośrodku piezoelektrycznym. Zanotujmy badania odnoszące się do fal płaskich, walcowych i sferycznych oraz fal powierzchniowych Rayleigh'a i Love'a. [30 - 32] [35].

W ostatnich latach opracowano również podstawy termo-piezoelektryczności [34] oraz rozwiązano szereg problemów ustalonej i nieustalonej termopiezoelektryczności takich jak fale termosprężyste, funkcje Greena, rozszerzone zagadnienie Lamba [35] - [37].

8. Sprzężenie fal mechanicznych i elektromagnetycznych w teorii gradientowej R. D. Mindlina

W rozważaniach naszych, dotyczących gradientowej teorii dielektryków, traktowaliśmy pole elektromagnetyczne jako kwazistatyczne pole elektryczne. Obecnie uwolnimy się od tego założenia i rozpatrywać będziemy pełny układ równań Maxwella (przy $\boldsymbol{I} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$).

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dot{\boldsymbol{A}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \varrho_e. \tag{8.2}$$

Tutaj φ jest skalarnym potencjałem elektrycznym, $\boldsymbol{A}$ wektorowym potencjałem magnetycznym. Równania (8.1) (8.2) wraz ze związkami konstytutywnymi

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}, \tag{8.3}$$

są punktem wyjścia dalszych rozważań. W rezultacie eliminacji wewnątrz równań (8.1) - (8.2) otrzyma się następujące równania falowe

$$(c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\varphi - c^2\varepsilon_0^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + c^2\varepsilon_0^{-1}\varrho_e = 0, \tag{8.4}$$

$$(c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\boldsymbol{A} + \varepsilon_0^{-1}\dot{\boldsymbol{P}} = 0, \quad \text{dla} \quad x \in B, \quad c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}, \tag{8.5}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned}(c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\varphi &= 0\\ (c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\boldsymbol{A} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad x \in B' \tag{8.6}$$

Zauważmy, że równanie bilansu sił intermolekularnych

$$E_{ji,j} + E_i^L + E_i + E_i^0 = 0, \tag{8.7}$$

jest sprzężone z równaniem (8.5) i (8.4) a to poprzez człon $E_i = -\varphi_{,i} - \dot{A}_i$. W przypadku ciała izotropowego otrzymamy następujący układ równań

$$(8.8) \qquad c_{44}\nabla^2 \boldsymbol{u} + (c_{11}+c_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + d_{44}\nabla^2\boldsymbol{P} + (d_{12}+d_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{X} = \varrho\ddot{\boldsymbol{u}},$$

$$(8.9) \qquad d_{44}\nabla^2\boldsymbol{u} + (d_{12}+d_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + (b_{44}+b_{77})\nabla^2\boldsymbol{P} + \\ +(b_{12}+b_{44}-b_{77})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} - a\boldsymbol{P} - \operatorname{grad}\varphi - \dot{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{E}^0 = 0,$$

$$(8.10) \qquad (c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\varphi - c^2\varepsilon_0^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + c^2\varepsilon_0^{-1}\varrho_e = 0,$$

$$(8.11) \qquad (c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\boldsymbol{A} + \varepsilon_0^{-1}\dot{\boldsymbol{P}} = 0.$$

Otrzymaliśmy nader złożony układ równań sprzężonych. Układ tych równań podany został przez R. D. Mindlina [32]. Badania tego autora [32] wykazały, że w przypadku harmonicznych fal poprzecznych w kuli wpływ sprzężenia jest nieznaczny i że stosowana może być teoria kwazistatyczna.

Poniżej podajemy uogólnione równania sprzężonej termopiezoelektryczności

$$(8.12) \qquad c_{44}\nabla^2\boldsymbol{u} + (c_{12}+c_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + d_{44}\nabla^2\boldsymbol{P} + (d_{12}+d_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + \\ + \boldsymbol{X} = \varrho\ddot{\boldsymbol{u}} + \gamma\operatorname{grad}\Theta,$$

$$(8.13) \qquad d_{44}\nabla^2\boldsymbol{u} + (d_{12}+d_{44})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + (b_{44}+b_{77})\nabla^2\boldsymbol{P} + \\ + (b_{12}+b_{44}-b_{77})\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} - a\boldsymbol{P} - \operatorname{grad}\varphi - \dot{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{E}^0 = \eta\operatorname{grad}\Theta,$$

$$(8.14) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\varphi - \varepsilon_0^{-1}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + \varepsilon_0^{-1}\varrho_e = 0,$$

$$(8.15) \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\boldsymbol{A} - \varepsilon_0^{-1}c^{-2}\dot{\boldsymbol{P}} = 0,$$

$$(8.16) \qquad k\nabla^2\Theta - c_\varepsilon\dot{\Theta} - T_0(\gamma\dot{u}_{k,k} + \eta\dot{P}_{k,k}) = -W.$$

W niniejszym artykule przeglądowym przedstawiliśmy modele piezoelektryczności i termopiezoelektryczności, poprzez najprostszy model Voigta aż do złożonego modelu dynamicznej termopiezoelektryczności. Widocznym jest, że wraz z uogólnieniem modelu rosną trudności matematyczne rozwiązania układu równań. Jednocześnie jednak bardziej złożone modele wyjaśniają szereg anomalii i pozwalają na wykrycie nowych zjawisk.

Badania pól sprzężonych prowadzą do nowych interdyscyplinarnych dziedzin nauki i tworzą pole współpracy badaczy reprezentujących różne dziedziny, mechaników, akustyków, termodynamików i elektrodynamików.

Rozwój pól sprzężonych jest charakterystycznym trendem we współczesnej mechanice ciała stałego.

Literatura cytowana w tekście

1. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Treubner, Leipzig, (1910).
2. R. A. TOUPIN, *The elastic dielectric*, J. Rat. Mech. Analysis, **55** (1956), 849.
3. R. A. MINDLIN, *Polarization gradient in elastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968), 637.
4. R. D. MINDLIN, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*, Problems of Continuum Mechanics. SIAM Philadelphia Pensylvania, 1961.

5. H. G. LIPPMANN. Ann. Chim. **29** (1881), 145.
6. J. and P. CURIE, *Compte Rendus*. **93** (1884), 1137.
7. M. P. WOLAROWICH, G. A. SOBOLEV, *Piezoelectric metod of geophysical prospecting of quartz* (w jęz. rosyjskim). Izd. Nauka, Moscow, 1969.
8. J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1969.
9. H. F. TIERSTEN, *The radiation and confinement of electromagnetic energy accompanying the oscilations of piezoelectric crystal plates*. Rec. Advances in Engineering Science. Part. I. Ed. A. C. Eringen, Gordon and Breach Science Publ. New York 1970.
10. H. F. TIERSTEN, *Linear piezoelectric plate vibrations*, Plenum Press, New York 1969.
11. J. L. BLEUSTEIN, J. ACCOUST, Soc. of America, **45** (1969), 614.
12. D. S. DRUMHELLER, A. KALNIS, J. Acoust. Soc. Of America, **47** (1970) 1343.
13. J. L. BLEUSTEIN, Applied Physics Letters, **13** (1968), 412.
14. P. M. BRANKOW, C. F. LONG, Acta Mechanika, **3** (1966), 13.
15. R. MEIR, K. SCHUSTER, Annalen der Physik, **11** (1933), 397.
16. J. KAYME, *Conductivity and viscosity effects on wave propagation in piezoelectric crystals*. J. Acoust. Soc. Amer. **26** (1949), 990.
17. W. NOWACKI, *Some general theorems of thermopiezoelectricity*, J. of Thermal Stresses, **1** (1978), 171.
18. H. PARKUS, *Über die Erweiterung des Hamilton'schen Principes auf thermoelastische Vorgänge*. Federhofer-Girkmann Festschrift Wien, 1950 Verlag F. Deuticke.
19. W. NOWACKI, *A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelastic fields in piezoelectric crystals*. Proc. Vibr. Problems **6**, 1 (1965).
20. A. V. PAL, *Surface waves in a thermo-piezoelectric medium of monoclinic symmetry*, Czech. J. Phys. **8**, 29 (1969), 1271.
21. C. A. MEAD, *Electron mechanism in thin insulating films*, Phys. Rev., **128** (1962), 2088.
22. C. A. MEAD, *Electron transport in thin insulating films*, Proc. Int. Sym. on Basic Problems in Thin Film Physic. Ruprecht. Gottingen (1966), 674.
23. R. D. MINDLIN, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*. J. of Elasticity, **2** 44 (1962), 217.
24. R. A. TOUPIN, *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Int. J. Eng. Sci., **1** (1963), 101.
25. R. D. MINDLIN, *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric fields*, Int. J. Solids Structures, **5** (1969) p. 1197.
26. J. SCHWARTZ, *Solutions of the equations of equilibrium of elastic dielectrics: stress functions, concentrated force, surface energy*, Int. J. Solids Structures, **5** (1969), 1209.
27. P. F. GOU, *Effects of gradient of polarization on stress-concentration at cylindrical hole in an elastic dielectric*, Int. J. Solids Structures, 7 (1971), 1467.
28. K. L. CHOWDHURY and P. G. GLOCKNER, *Point charge in the interior of an elastic dielectric half space* Int. J. Solids Structures, **15** (1977), 481.
29. A. ASKAR, P. C. Y. LEE and A. S. CAKMAK, *The effect of surface and discontinuity on the surface energy and other induced fields in elastic dielectrics with polarization gradient*, Int. J. Solids Structures, **7** (1971), 523.
30. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Love's waves in elastic isotropic dielectrics*, Bull. Acad. Polon. Sci (w druku).
31. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Surface waves in piezoelectric materials of classe* 42 *m*, Bull. Acad. Polon. Sci (w druku).
32. R. D. MINDLIN, *Electromagnetic radiation from a vibrating, elastic sphere*, Int. J. Solids Structures, **10** (1974), 1307.
33. K. L. CHOWDHURY, P. G. GLOCKNER, *On thermoelastic dielectrics*, Int. J. Solids Structures, **13** (1977), 1173.
34. K. L. CHOWDHURY, M. EPSTEIN, P. G. GLOCKNER, *On the thermodynamics of nonlinear elastic dielectrics*, Departamental Report No 119, Dep. of Mech. Engeering. The University of Calgary, March 1978.
35. J. P. NOWACKI, P. G. GLOCKNER, *Some dynamical problems of thermoelastic dielectric*, Int. J. Solids Structures, 1978 (w druku).

37. J. P. NOWACKI, P. G. GLOCKNER, *Propagation of waves in the interior of a thermoelastic dielectric half-space*, Int. J. Solids Structures (1981).
38. L. H. GLOCKNER, A. U. RAE and C. D. HARTMAN „*(110) Nickel surface*". J. Appl. Phys. **32** (1961), 2432.
39. R. A. TOUPIN and D. C. GAZIS, *Surface effects and initial stress in continuum and lattice models in crystals*, In Lattice Dynamics, R. F. Wallis Editor, Pergamon Press, Oxford 1964, 597.

Р е з ю м е

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Работа посвящена дискусии некоторых математических моделей пьезоэлектричества и пьезо-термоэлектричества. Начиная с модели В. Фойгта, перечислено более общие случаи в которых электромагнетические и деформационные поля сопряжены. Рассмотрено квазистатическую модель термопьезоэлектричества и довольно общую модель Миндлина, в которой учтено влияние градиента поляризации в упругом диэлектрике.

S u m m a r y

MATHEMATICAL MODELS OF A PHENOMENOLOGICAL PIEZOELECTRICITY

The purpose the paper is to discuss mathematical models of piezo-thermoelectricity. Starting from W. Voigt quasistatic model we pass to more general case in which there is a coupling between the electromagnetic and deformation fields. The quasistatic model of the thermopiezoelectricity and general model introduced by Mindlin, in which the effect of a polarization gradient in elastic dielectrics is taken into account, have been also considered.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 października 1981 roku