

ZGINANIE SPRĘŻYSTEJ POWŁOKI W KSZTAŁCIE PARABOLOIDY ELIPTYCZNEJ PODPARTEJ NA ŻEBRACH

KRZYSZTOF HENRYK ŻMIJEWSKI (WARZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest rozwiązanie problemu zginania powłoki sprężystej w kształcie paraboloidy eliptycznej, o małej wyniosłości, rozpiętej na planie prostokąta i podpartej wzdłuż brzegów na sprężystych żebrach.

Rozważono powłokę wykonaną z materiału liniowo-sprężystego, jednorodnego i izotropowego, o sztywności warunkującej występowanie odpowiednio małych przemieszczeń.

Punktem wyjścia jest układ trzech przemieszczeniowych równań różniczkowych liniowej teorii powłok, spełniających założenia Kirchhoffa-Love'a oraz uwzględniających uproszczenia wprowadzone przez W. Z. Własowa dla powłok o małych wyniosłościach.

Pomimo oczywistego dużego znaczenia praktycznego opisanego problemu nie znaleziono jego analitycznego rozwiązania w dostępnej literaturze technicznej. Istniejące rozwiązania analityczne ograniczają się jedynie do prostego przypadku przegubowo-przesuwnej podparcia brzegów powłoki. Rozwiązanie takie, wykorzystując metody pojedynczych lub podwójnych szeregów Fouriera, można znaleźć w wielu monografiach, m.in. [2], [3].

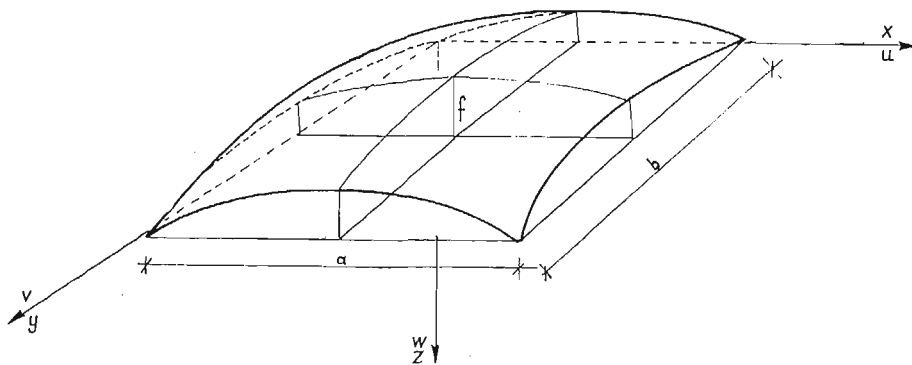
Ogólny algorytm rozwiązywania problemów brzegowych z zakresu statyki i dynamiki powłok o małych wyniosłościach rozpiętych na planie prostokąta, opracowany za pomocą metody skończonej transformacji Fouriera, podano w pracach Z. MAZURKIEWICZA [4] oraz Z. MAZURKIEWICZA i A. WIWEGERA [5].

Zastosowanie metody różnic skończonych do rozwiązania rozważanego zagadnienia można znaleźć m.in. w znanej monografii A. A. NAZAROWA [2], pracach P. WILDEGO i in. [6] oraz E. MALERSKIEGO [7]. Natomiast rozwiązanie uzyskane za pomocą metody elementów skończonych podali m.in. O. C. ZIENKIEWICZ [8], J. SZMELTER i in. [9], J. J. CONNOR i C. BERBBIA [10].

W niniejszej pracy podano (opracowany przy zastosowaniu metody skończonej transformacji Fouriera) algorytm rozwiązania problemów brzegowych powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej. Szczegółowo opisano przypadek zginania powłoki rozpiętej na planie kwadratu i podpartej wzdłuż brzegów na sprężystych żebrach. Dokonano analizy wpływu warunków brzegowych oraz niektórych parametrów geometrycznych na pracę statyczną rozważanej powłoki. Zbadano numerycznie zbieżność rozwiązania. Otrzymane wartości wielkości statycznych i geometrycznych przedstawiono na wykresach aksometrycznych. Uzyskane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi za pomocą metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym oraz metody elementów skończonych. Podano wnioski i uwagi dotyczące oceny praktycznej użyteczności metod zastosowanych do rozwiązania problemu stanowiącego przedmiot rozprawy.

2. Niektóre związki i równania teorii powłok o małych wyniosłościach

Rozważmy sprężystą, jednorodną, izotropową powłokę o stałej grubości i małej wyniosłości rozpiętą na planie prostokąta (rys. 1), poddaną działaniu dowolnego obciążenia normalnego.



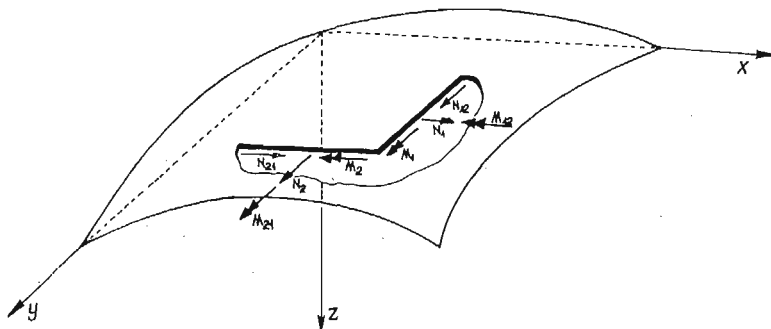
Rys. 1

Znany z technicznej teorii powłok W. Z. WŁASOWA [1] układ trzech równań różniczkowych opisujący stan przemieszczeń takiej powłoki ma postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + k_1 N_1 + 2k_{12} N_{12} + k_2 N_2 + p = 0,$$

gdzie w odniesieniu do środkowej powierzchni powłoki (rys. 2), N_1 , N_2 , N_{12} oznaczają wewnętrzne siły normalne oraz styczne, M_1 , M_2 , M_{12} — momenty zginające i skręcające, ν — współczynnik Poissona, E — moduł Younga, h — grubość powłoki, k_1 , k_2 , k_{12} — krzywizny środkowej powierzchni powłoki, p — obciążenie.



Rys. 2

Zgodnie z teorią Własowa siły wewnętrzne występujące w równaniach (2.1), (2.2) określone są następująco:

$$(2.3) \quad N_1 = A \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_1 + \nu k_2) w \right], \quad N_2 = A \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_2 + \nu k_1) w \right],$$

$$N_{12} = B \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w \right),$$

$$(2.4) \quad M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$(2.5) \quad A = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Krzywizny powłoki o małej wyniosłości wyrażamy za pomocą wzorów:

$$(2.6) \quad k_1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \quad k_{12} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}, \quad k_2 = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2},$$

gdzie $Z = Z(x, y)$ jest równaniem środkowej powierzchni powłoki.

W pracy tej rozważono powłoki o stałych krzywiznach. Ogólne równanie powierzchni środkowej takiej powłoki ma postać:

$$(2.7) \quad Z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \frac{1}{2}(k_1 x^2 + 2k_{12} xy + k_2 y^2).$$

Warunki brzegowe na krawędziach powłoki wzmocnionych żebrami można zapisać następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} M_1 \Big|_{x=0}^{\pm} \mp \frac{\partial M_{s2}^*}{\partial y} &= 0, & M_2 \Big|_{y=0}^{\pm} \mp \frac{\partial M_{s1}^*}{\partial x} &= 0, \\ N_1 \Big|_{x=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{n2}^*}{\partial y^2} &= 0, & N_2 \Big|_{y=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{n1}^*}{\partial x^2} &= 0, \\ N_{12} \Big|_{x=0}^{\pm} \pm \frac{\partial N_2^*}{\partial y} &= 0, & N_{12} \Big|_{y=0}^{\pm} \pm \frac{\partial N_1^*}{\partial x} &= 0, \\ Q_1 \Big|_{x=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{t2}^*}{\partial y^2} \pm k_2 N_2^* &= 0, & Q_2 \Big|_{y=0}^{\pm} \pm \frac{\partial^2 M_{t1}^*}{\partial x^2} \pm k_1 N_1^* &= 0, \end{aligned}$$

gdzie Q_1, Q_2 — sprowadzone siły poprzeczne

$$(2.9) \quad Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, \quad Q_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x}.$$

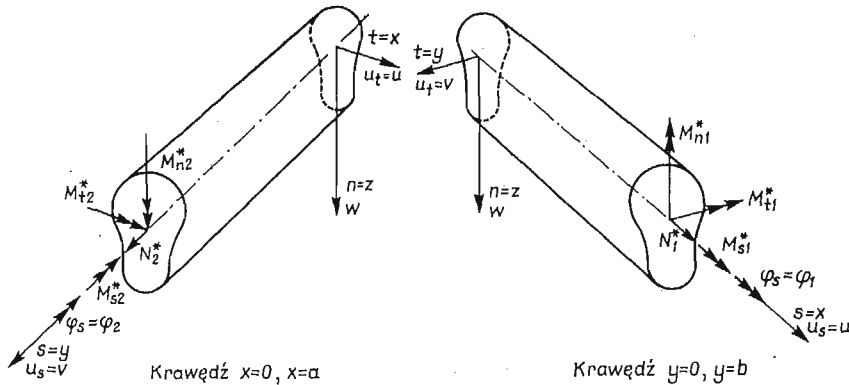
Symbolem (*) oznaczono wielkości odnoszące się do żeber krawędziowych, N^* oznacza siłę podłużną, M_s^* — moment skręcający, M_n^* — moment zginający w płaszczyźnie poziomej, M_t^* — moment zginający w płaszczyźnie pionowej, indeks 1 odpowiada tu krawędziom równoległym do osi x , 2 — osi y (rys. 3).

Przyjęto, że oś geometryczna żebra leży na środkowej powierzchni powłoki, a więc krzywizna żebra jest równa odpowiedniej krzywiznie powłoki.

Siły wewnętrzne występujące w żebrach wyrażamy za pomocą wzorów:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} N^* &= EF \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} - kw \right), & M_s^* &= GJ_s \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}, \\ M_i^* &= -EJ_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & M_n^* &= -EJ_2 \frac{\partial^2 u_t}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

gdzie F oznacza pole przekroju poprzecznego żebra J_1, J_2, J_s — momenty bezwładności przy zginaniu i skręcaniu, G — moduł sprężystości poprzecznej, s, t — współrzędne (x lub y) styczna i binormalna do osi żebra.



Rys. 3

3. Podstawowe wzory i związki metody skończonej transformacji Fouriera wykorzystane w pracy

Przedstawimy podstawowe związki i niekonwencjonalne oznaczenia wykorzystane dalej przy transformacji funkcji jednej i dwóch zmiennych (por. [4]).

Zakładamy, że funkcje transformowane spełniają warunki Dirichleta w przedziale $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$.

Skończoną transformację Fouriera funkcji jednej zmiennej $f(x)$ w przedziale $0 \leq x \leq a$ określa wzór:

$$(3.1) \quad T_m^k(f) = \int_0^a f(x) \Psi_k(\alpha_m x) dx, \quad k = 1, 2; m = 0, 1, \dots,$$

gdzie

$$\alpha_m = m\pi/a, \quad \Psi_1(\cdot) = \sin(\cdot), \quad \Psi_2(\cdot) = \cos(\cdot).$$

Odwrotną transformację funkcji $f(x)$ w przedziale $0 \leq x \leq a$ wyrażamy za pomocą szeregu Fouriera:

$$(3.2) \quad f(x) = \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m T_m^k(f) \Psi_k(\alpha_m x), \quad k = 1, 2; m = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie:

$$\lambda_m = \begin{cases} 1/2 & \text{dla } m = 0, \\ 1 & \text{dla } m \neq 0. \end{cases}$$

Całkując przez części otrzymujemy:

$$(3.3) \quad T_m^1 \left(\frac{df}{dx} \right) = -\alpha_m T_m^2(f), \quad T_m^2 \left(\frac{df}{dx} \right) = B_m(f) + \alpha_m T_m^1(f).$$

gdzie $B_m(f)$ nazywamy wyrażeniem brzegowym funkcji $f(x)$, ma ono postać:

$$(3.4) \quad B_m(f) = f(a)(-1)^m - f(0), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Skończoną transformację Fouriera funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ w przedziale $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ zapisujemy następująco:

$$(3.5) \quad T_{mn}^{kl}(f) = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \Psi_k(\alpha_m x) \Psi_l(\beta_n y) dx dy, \quad k, l = 1, 2;$$

$$\alpha_m = m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Transformację odwrotną funkcji $f(x, y)$ wyrażamy za pomocą podwójnego szeregu Fouriera:

$$(3.6) \quad f(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} T_{mn}^{kl}(f) \Psi_k(\alpha_m x) \Psi_l(\beta_n y), \quad k, l = 1, 2;$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots$$

wprowadzając oznaczenie: $\lambda_{mn} = \lambda_m \lambda_n$.

Wyrażenia brzegowe funkcji $f(x, y)$ mają postać:

$$(3.7) \quad B_{mn}(f) = f(a, b)(-1)^{m+n} - f(a, 0)(-1)^m - f(0, b)(-1)^n + f(0, 0),$$

$$B_{mn}^{1k}(f) = (-1)^m T_n^k \{f(a, y)\} - T_n^k \{f(0, y)\}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(3.8) \quad B_{mn}^{2k}(f) = (-1)^n T_m^k \{f(x, b)\} - T_m^k \{f(x, 0)\}, \quad k = 1, 2.$$

Całkując przez części znajdujemy:

$$(3.9) \quad T_{mn}^{1k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\alpha_m T_{mn}^{2k}(f), \quad T_{mn}^{2k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = B_{mn}^{1k}(f) + \alpha_m T_{mn}^{1k}(f),$$

$$B_{mn}^{21} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\alpha_m B_{mn}^{22}(f), \quad B_{mn}^{22} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = B_{mn}(f) + \alpha_m B_{mn}^{21}(f).$$

Analogiczne związki można otrzymać dla pochodnej $\partial f / \partial y$.

Korzystając ze wzorów (3.5), (3.6) łatwo stwierdzić, że skończona transformacja Fouriera funkcji $f(x, y)$ spełnia następujący związek:

$$(3.10) \quad T_{mn}^{kl}(f) = \frac{4}{ab} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} Q_{mni j}^{klrs} T_{ij}^{rs}(f), \quad k, l, r, s = 1, 2, \dots,$$

$$m, n = 0, 1, \dots,$$

przy czym

$$(3.11) \quad Q_{mni j}^{klrs} = \int_0^a \int_0^b \Psi_k(\alpha_m x) \Psi_r(\alpha_i x) \Psi_l(\beta_n y) \Psi_s(\beta_j y) dx dy.$$

Wzór (3.10) jest słuszny dla każdej kombinacji indeksów r, s .

4. Transformacja równań równowagi

Po zastosowaniu do równań równowagi (2.1) transformacji T_{mn}^{21} , T_{mn}^{12} oraz wyrażeniu N_1 , N_2 , N_{12} za pomocą wzorów (2.3) i wykorzystaniu związków (3.9) doprowadzamy układ (2.1) do postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (A\alpha_m^2 + B\beta_n^2)u_{mn}^{(1)} + (A\nu + B)\alpha_m\beta_n v_{mn}^{(1)} + B\beta_n(U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - N_{mn}^{(1)} + \\ + (k_1 + \nu k_2)A\alpha_m w_{mn}^{(1)} - 2k_{12}B\beta_n w_{mn}^{(2)} = 0, \\ (A\nu + B)\alpha_m\beta_n u_{mn}^{(1)} + (A\beta_n^2 + B\alpha_m^2)v_{mn}^{(1)} + B\alpha_m(U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - N_{mn}^{(2)} + \\ + (k_2 + \nu k_1)A\beta_n w_{mn}^{(1)} - 2k_{12}B\alpha_m w_{mn}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.2) \quad w_{mn}^{(1)} = T_{mn}^{11}(w), \quad w_{mn}^{(2)} = T_{mn}^{22}(w), \quad u_{mn}^{(1)} = T_{mn}^{21}(u), \quad v_{mn}^{(1)} = T_{mn}^{12}(v),$$

$$(4.3) \quad U_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{22}(u), \quad U_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{12}(v), \quad N_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{11}(N_1), \quad N_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{21}(N_2).$$

Rozwiązując równania (4.1) względem $u_{mn}^{(1)}$ i $v_{mn}^{(1)}$ otrzymujemy:

$$(4.4) \quad u_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(1)}w_{mn}^{(1)} + F_{mn}^{(1)}w_{mn}^{(2)} + B_{mn}^{(1)}, \quad v_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(2)}w_{mn}^{(1)} + F_{mn}^{(2)}w_{mn}^{(2)} + B_{mn}^{(2)},$$

wyrażenia $E_{mn}^{(l)}$, $F_{mn}^{(l)}$ oraz $B_{mn}^{(l)}$ ($l = 1, 2$) — zależne wyłącznie od warunków brzegowych mają postać:

$$(4.5) \quad E_{mn}^{(1)} = \frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}^2} \{k_2 \alpha_{mn} - k_1 [\alpha_m^2 + (2 + \nu)\beta_n^2]\}, \quad E_{mn}^{(2)} = \frac{\beta_n}{\Delta_{mn}^2} \{k_1 \beta_{mn} - k_2 [\beta_n^2 + (2 + \nu)\alpha_m^2]\},$$

$$(4.6) \quad F_{mn}^{(1)} = 2k_{12} \frac{\beta_n}{\Delta_{mn}^2} \beta_{mn}, \quad F_{mn}^{(2)} = 2k_{12} \frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}^2} \alpha_{mn},$$

$$(4.7) \quad B_{mn}^{(1)} = \frac{-1}{\Delta_{mn}^2} \left\{ \beta_n \beta_{mn} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - \frac{1}{AB} [A\beta_n^2 + B\alpha_m^2] N_{mn}^{(1)} + (\nu A + B) \alpha_m \beta_n N_{mn}^{(2)} \right\},$$

$$B_{mn}^{(2)} = \frac{-1}{\Delta_{mn}^2} \left\{ \alpha_m \alpha_{mn} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - \frac{1}{AB} [(A\alpha_m^2 + B\beta_n^2) N_{mn}^{(2)} + (\nu A + B) \alpha_m \beta_n N_{mn}^{(1)}] \right\},$$

$$(4.8) \quad \Delta_{mn}^2 = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2, \quad \alpha_{mn} = \alpha_m^2 - \nu \beta_n^2, \quad \beta_{mn} = \beta_n^2 - \nu \alpha_m^2.$$

Zastosujemy teraz transformację T_{mn}^{11} do równania (2.2). Korzystając ze wzorów (2.4), (2.5) oraz (3.9) przekształcamy to równanie następująco:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} A(k_1 + \nu k_2)\alpha_m u_{mn}^{(1)} + k_{12}(1 - \nu)(\beta_n u_{mn}^{(2)} + \alpha_m v_{mn}^{(2)}) + (k_2 + \nu k_1)\beta_n v_{mn}^{(1)} + \\ + \{D\Delta_{mn}^2 + A(k_1 + k_2)^2 + 2(1 - \nu)(k_{12}^2 - k_1 k_2)\}w_{mn}^{(1)} + B_{mn}^{(3)} = p_{mn}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.10) \quad B_{mn}^{(3)} = \alpha_m M_{mn}^{(1)} + \beta_n M_{mn}^{(2)} + D(\alpha'_{mn} W_{mn}^{(1)} + \beta'_{mn} W_{mn}^{(2)} + \gamma'_{mn} W_{mn}^{(0)}),$$

$$(4.11) \quad M_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{11}(M_1), \quad M_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{21}(M_2),$$

$$(4.12) \quad W_{mn}^{(0)} = B_{mn}(w), \quad W_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{11}(w), \quad W_{mn}^{(2)} = B_{mn}^{21}(w),$$

$$(4.13) \quad T_{mn}^{11}\{p\} = p_{mn},$$

$$(4.14) \quad u_{mn}^{(2)} = T_{mn}^{12}(u), \quad v_{mn}^{(2)} = T_{mn}^{21}(v).$$

$$(4.15) \quad \alpha'_{mn} = [\alpha_m^2 + (2 - \nu)\beta_n^2]\alpha_m, \quad \beta'_{mn} = [\beta_n^2 + (2 - \nu)\alpha_m^2]\beta_n, \quad \gamma'_{mn} = 2(1 - \nu)\alpha_m\beta_n.$$

Na podstawie wzoru (3.10) możemy wyznaczyć współczynniki $u_{mn}^{(2)}$ i $v_{mn}^{(2)}$:

$$(4.16) \quad u_{mn}^{(2)} = \frac{4}{ab} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} Q_{mni j}^{1221} u_{ij}^{(1)}, \quad v_{mn}^{(2)} = \frac{4}{ab} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} Q_{mni j}^{2112} v_{ij}^{(1)}.$$

Podstawiając do równania (4.9) związki (4.4) oraz (4.16) otrzymujemy:

$$(4.17) \quad w_{mn}^{(1)} = \frac{1}{D_{mn}} \left(p_{mn} - Z_{mn} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{mni j} w_{ij}^{(1)} \right),$$

gdzie:

$$(4.18) \quad D_{mn} = D \Delta_{mn}^2 + 2B \left[2k_{12}^2 + \frac{1+\nu}{\Delta_{mn}^2} (k_1 \beta_n^2 + k_2 \alpha_m^2) \right],$$

$$(4.19) \quad Z_{mn} = B_{mn}^{(3)} + H_{mn}^{(1)} + H_{mn}^{(2)},$$

$$(4.20) \quad S_{mni j} = \frac{4A k_{12}}{ab} (G_{mn} + J_{mni j} + R_{mni j}),$$

$$(4.21) \quad H_{mn}^{(1)} = \frac{4A k_{12}}{ab} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{rs} (\beta_n Q_{mnr s}^{1221} B_{rs}^{(1)} + \alpha_m Q_{mnr s}^{2112} B_{rs}^{(2)}),$$

$$H_{mn}^{(2)} = E_{mn}^{(1)} N_{mn}^{(1)} + E_{mn}^{(2)} N_{mn}^{(2)} - \frac{1+\nu}{1-\nu} B G_{mn} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}),$$

$$(4.22) \quad G_{mn} = \frac{\gamma'_{mn}}{\Delta_{mn}^2} (k_1 \beta_n^2 + k_2 \alpha_m^2), \quad J_{mni j} = \beta_n Q_{mni j}^{1221} E_{ij}^{(1)} + \alpha_m Q_{mni j}^{2112} E_{ij}^{(2)},$$

$$R_{mni j} = \frac{4}{ab} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{rs} Q_{rsi j}^{2211} (\beta_n Q_{mni j}^{1221} F_{rs}^{(1)} + \alpha_m Q_{mni j}^{2112} F_{rs}^{(2)}).$$

Układ równań (4.17) może być również przedstawiony w innej postaci:

$$(4.23) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [S_{mni j} - D_{ij} \delta_{im} \delta_{jn}] w_{ij}^{(1)} = p_{mn} - Z_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

gdzie δ_{im} , δ_{jn} oznaczają symbole Kroneckera.

Związki (4.3), (4.11), (4.12) zapisujemy w zmienionej formie korzystając przy tym z następujących oznaczeń:

$$(4.24) \quad \begin{aligned} u_n^{(i)} &= T_n^2 \{v(l_i, y)\},_{i=1,2}, & u_m^{(i)} &= T_m^2 \{u(x, l_i)\},_{i=3,4}, \\ w_n^{(i)} &= T_n^1 \{w(l_i, y)\},_{i=1,2}, & w_m^{(i)} &= T_m^1 \{w(x, l_i)\},_{i=3,4}, \\ n_n^{(i)} &= T_n^1 \{N_1(l_i, y)\},_{i=1,2}, & n_m^{(i)} &= T_m^1 \{N_2(x, l_i)\},_{i=3,4}, \\ m_n^{(i)} &= T_n^1 \{M_1(l_i, y)\},_{i=1,2}, & m_m^{(i)} &= T_m^1 \{M_2(x, l_i)\},_{i=3,4}, \\ l_1 &= 0, \quad l_2 = a, & l_3 &= 0, \quad l_4 = b. \end{aligned}$$

Na podstawie (3.8), (4.24) otrzymujemy:

$$(4.25) \quad \begin{aligned} U_{mn}^{(l)} &= (-1)^m u_n^{(2l)} - u_n^{(2l-1)}, & W_{mn}^{(l)} &= (-1)^m w_n^{(2l)} - w_n^{(2l-1)}, \\ N_{mn}^{(l)} &= (-1)^m n_n^{(2l)} - n_n^{(2l-1)}, & M_{mn}^{(l)} &= (-1)^m m_n^{(2l)} - m_n^{(2l-1)}, \\ & & l &= 1, 2. \end{aligned}$$

Jeżeli funkcje opisujące warunki brzegowe są znane wtedy można łatwo znaleźć wartość wyrażenia Z_{mn} . Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań (4.23) zezwala na obliczenie skończonej liczby współczynników w_{mn} oraz przemieszczeń i sił wewnętrznych, przy czym dokładność rozwiązania rośnie wraz ze wzrostem liczby równań. W przypadku, gdy współczynniki (4.24) nie są znane, wówczas wyznaczamy je korzystając z odpowiednich warunków brzegowych.

5. Algorytm rozwiązywania problemów brzegowych

— powłoka w kształcie paraboloidy eliptycznej

Rozważmy zginanie powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej, dla której przyjmujemy:

$$(5.1) \quad k_1 = k_2 = k, \text{ przy } k_{12} = 0.$$

W tym przypadku wzory (4.5), (4.6) oraz (4.18 ÷ 21) upraszczają się do postaci:

$$(5.2) \quad E_{mn}^{(1)} = -k(1+\nu) \frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}}, \quad E_{mn}^{(2)} = -k(1+\nu) \frac{\beta_n}{\Delta_{mn}},$$

$$(5.3) \quad F_{mn}^{(1)} = F_{mn}^{(2)} = 0,$$

$$(5.4) \quad D_{mn} = D \square_{mn} = D(\Delta_{mn}^2 + \kappa^4), \quad \kappa^4 = 12(1-\nu^2)k^2/h^2,$$

$$(5.5) \quad S_{mnlj} = 0,$$

$$(5.6) \quad H_{mn}^{(1)} = 0, \quad H_{mn}^{(2)} = \frac{k(1+\nu)}{\Delta_{mn}} [\alpha_m N_{mn}^{(1)} + \beta_n N_{mn}^{(2)} - 2B \alpha_m \beta_n (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)})].$$

Uwzględniając wyrażenia (5.2 ÷ 6) zapisujemy układ równań (4.23) oraz wzory (4.4) następująco:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} w_{mn} &= w_{mn}^{(1)} = \frac{1}{D_{mn}} (p_{mn} - Z_{mn}), \\ u_{mn} &= u_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(1)} w_{mn} + B_{mn}^{(1)}, \quad v_{mn} = v_{mn}^{(1)} = E_{mn}^{(2)} w_{mn} + B_{mn}^{(2)}. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pracy zajmiemy się dwoma praktycznymi rodzajami podparć powłoki.

5.1. Powłoka podparta przegubowo przesuwnie. Rozważmy powłokę podpartą zgodnie z następującymi warunkami brzegowymi (rys. 4a):

$$(5.8) \quad \begin{aligned} v &= 0, \quad w = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_1 = 0 & \text{dla } x = 0, x = a, \\ u &= 0, \quad w = 0, \quad N_2 = 0, \quad M_2 = 0 & \text{dla } y = 0, y = b. \end{aligned}$$

W tym przypadku jest $B_{mn}^{(1)} = B_{mn}^{(2)} = 0$ oraz $Z_{mn} = 0$, a współczynniki rozwinięcia funkcji przemieszczeń w podwójne szeregi Fouriera znajdujemy bezpośrednio ze wzoru (5.7):

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{D_{mn}}, \quad u_{mn} = E_{mn}^{(1)} \frac{p_{mn}}{D_{mn}}, \quad v_{mn} = E_{mn}^{(2)} \frac{p_{mn}}{D_{mn}}.$$

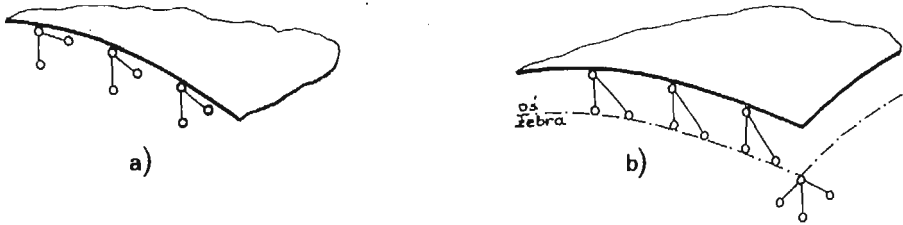
Jeżeli powłoka poddana została działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia $p(x, y) = \text{const}$, wtedy na podstawie definicji (3.5) oraz (4.13) otrzymujemy:

$$(5.9) \quad p_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{dla } m, n = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{4p}{\alpha_m \beta_n} & \text{dla } m, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Zatem funkcję opisującą ugięcie środkowej powierzchni powłoki można w rozważanym przypadku wyrazić za pomocą następującego szeregu:

$$(5.10) \quad w^0(x, y) = \frac{16p}{Dab} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} F_m^{(-1)}(y) \sin \alpha_m x, \quad F_m^{(-1)} = \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\beta_n^{-1}}{\square_{mn}} \sin \beta_n y.$$

Podobnie znajdujemy funkcje opisujące pozostałe wielkości geometryczne i statyczne. Sumy szeregów funkcyjnych typu $F_m^{(-1)}(y)$ można przedstawić w postaci zamkniętej [12].



Rys. 4

5.2. Powłoka podparta żebrowo. Rozważmy powłokę o brzożach wzmocnionych żebrowo, podpartą przegubowo nieprzesuwnie tylko w narożach. Zakładamy, że sztywności belek krawędziowych odpowiadające skręcaniu i zginaniu w płaszczyźnie poziomej są równe zeru, natomiast żebra przenoszą oddziaływania pionowe i styczne (rys. 4b). W tym przypadku warunki brzegowe (2.8) mają postać:

$$(5.11) \quad M_1|_{x=a} = 0, \quad M_2|_{y=b} = 0, \quad N_1|_{x=0} = 0, \quad N_2|_{y=0} = 0,$$

$$(5.12) \quad N_{12}|_{x=0} \pm \frac{\partial N_2^*}{\partial y} = 0, \quad N_{12}|_{y=0} \pm \frac{\partial N_1^*}{\partial x} = 0,$$

$$Q_1|_{x=a} \pm \frac{\partial^2 M_{12}^*}{\partial y^2} \pm kN_2^* = 0, \quad Q_2|_{y=b} \pm \frac{\partial^2 M_{11}^*}{\partial x^2} \pm kN_1^* = 0,$$

oraz

$$(5.13) \quad \left. \begin{aligned} w = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \\ M_{12}^* = 0, \quad M_{21}^* = 0, \end{aligned} \right\} \text{ w punktach } (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$$

(powłoka podparta przegubowo nieprzesuwnie w narożach).

Siły wewnętrzne wyrażone są za pomocą wzorów (2.3 ÷ 4), (2.9 ÷ 10).

Warunki brzegowe (5.11) oraz $w = 0$ w narożach powłoki będą spełnione jeżeli we wzorach (4.7), (4.10) przyjmiemy:

$$(5.14) \quad N_{mn}^{(1)} = N_{mn}^{(2)} = 0, \quad M_{mn}^{(1)} = M_{mn}^{(2)} = 0, \quad W_{mn}^{(0)} = 0.$$

Należy jeszcze spełnić warunki (5.12), (5.13).

Na podstawie (5.14) oraz uwzględniając (4.10), (4.19) przekształcamy związek (5.7)₁ następująco:

$$(5.15) \quad w_{mn} = \frac{1}{D_{mn}} \left[p_{mn} - D(\alpha'_{mn} W_{mn}^{(1)} + \beta'_{mn} W_{mn}^{(2)}) + E h k \frac{\alpha_m \beta_n}{\Delta_{mn}} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) \right].$$

We wzorze (5.15) występują niewiadome współczynniki $W_{mn}^{(i)}$, $U_{mn}^{(i)}$, $i = 1, 2$, które (pamiętając o (4.25)) można wyznaczyć ze statycznych warunków brzegowych.

Na podstawie (5.12), (3.2), (3.6) otrzymujemy dla brzegów $x = 0$, $x = a$:

$$(5.16) \quad \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} (\pm 1)^m \lambda_m T_{mn}^{22} (N_{12}) \pm T_n^2 \left(\frac{\partial N_2^*}{\partial y} \right) = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$(5.17) \quad \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} (\pm 1)^m \lambda_m T_{mn}^{21} (Q_1) \pm T_n^1 \left(\frac{\partial^2 M_{12}^*}{\partial y^2} \right) \pm T_n^1 (k N_2^*) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Równania dla krawędzi $y = 0$, $y = b$ mają analogiczną postać.

Zgodnie z (2.9) oraz po uwzględnieniu (2.4), (4.25)₂, (5.14) transformacja siły Q_1 przyjmuje postać:

$$(5.18) \quad T_{mn}^{21} (Q_1) = D[\alpha'_{mn} w_{mn} + \alpha''_{mn} W_{mn}^{(1)} + \gamma'_{mn} W_{mn}^{(2)}],$$

$$(5.19) \quad \alpha''_{mn} = \alpha_m^2 + 2(1-\nu)\beta_n^2, \quad \gamma'_{mn} = (2-\nu)\alpha_m\beta_n.$$

Stosując skończoną transformację Fouriera T_n^1 do następnych członów równania (5.17) oraz pamiętając o (5.13) otrzymujemy następujący nieskończony układ równań:

$$(5.20) \quad \begin{aligned} & \frac{2D}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \{ \alpha'_{mn} w_{mn} + \alpha''_{mn} W_{mn}^{(1)} + \gamma'_{mn} W_{mn}^{(2)} \} + \\ & + (-1)^i \{ (EJ^{(i)} \beta_n^4 + k^2 EF) w_n^{(i)} + EFk \beta_n u_n^{(i)} \} = 0, \\ & \lambda_m^{(i)} = \lambda_m \varepsilon_m^{(i)}, \quad \varepsilon_m^{(i)} = (1-)^{(i+1)m}, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Podstawiając do równań (5.20) w miejsce w_{mn} prawą stronę wyrażenia (5.15) doprowadzamy ten układ do postaci:

$$(5.21) \quad \begin{aligned} Q_n^{(i)} + D \left\{ R_n^{(3-i)} w_n^{(2)} - \tilde{R}^{(i)} w_n^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \gamma'_{mn} [(-1)^n w_m^{(4)} - w_m^{(3)}] \right\} + \\ + E h k \beta_n \left\{ A_n^{(3-i)} u_n^{(2)} - \tilde{A}^{(i)} u_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m^{(i)} \alpha_m \alpha'_{mn}}{\Delta_{mn} \square_{mn}} [(-1)^n u_m^{(4)} - u_m^{(3)}] \right\}, \\ n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$(5.22) \quad R_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \left(\alpha'_{mn} - \frac{\alpha_{mn}^{'2}}{\square_{mn}} \right), \quad \tilde{R}_n^{(i)} = R_n^{(i)} - (-1)^i (J^{(i)} \beta_n^4 + k^2 F^{(i)}) \frac{Ea}{2D},$$

$$(5.23) \quad A_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} \frac{\alpha_m \alpha'_{mn}}{\Delta_{mn} \square_{mn}}, \quad \tilde{A}_n^{(i)} = A_n^{(i)} - (-1)^i \frac{a F^{(i)}}{2h},$$

$$(5.24) \quad Q_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} p_{mn} \frac{\alpha'_{mn}}{\square_{mn}}, \quad \gamma_{mn}''' = \gamma_{mn}'' - \frac{\alpha'_{mn} \beta'_{nm}}{\square_{mn}}.$$

Przekształćmy teraz układ równań (5.16). Zgodnie z (2.3)₂, (5.1) i (3.9) jest:

$$(5.25) \quad T_{mn}^{22}(N_{12}) = B \{ B_{mn}^{22}(u) + \beta_n T_{mn}^{21}(u) + B_{mn}^{12}(v) + \alpha_m T_{mn}^{12}(v) \},$$

a po wykorzystaniu wzorów (4.2), (4.3), (5.7) i uwzględnieniu związków (4.7), (4.25)₁, (5.2) otrzymujemy:

$$(5.26) \quad T_{mn}^{22}(N_{12}) = 2B(1+\nu) \left\{ \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{\Delta_{mn}^2} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - k \frac{\alpha_m \beta_n}{\Delta_{mn}} w_{mn} \right\}.$$

Po przeprowadzeniu transformacji pozostałych członów (5.16) znajdujemy następujący nieskończony układ równań:

$$(5.27) \quad Eh \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} \left\{ \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{\Delta_{mn}^2} (U_{mn}^{(1)} + U_{mn}^{(2)}) - \frac{k \alpha_m \beta_n}{\Delta_{mn}} w_{mn} \right\} + \\ - (-1)^i \{ EF^{(i)} \beta_n (\beta_n u_n^{(i)} + k w_n^{(i)}) - B_n (N_2^{*(i)}) \} = 0, \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Łatwo zauważyć, że dla $m = n = 0$ równania (5.27) są spełnione jeżeli jest:

$$(5.28) \quad B_0(N_2^{*(i)}) = 0.$$

Biorąc pod uwagę (3.4), (5.28) wprowadzamy oznaczenia:

$$(5.29) \quad r^{(i)} = N_2^{*(i)}(0) = N_2^{*(i)}(b), \quad i = 1, 2.$$

Na podstawie (5.28) rozpoczynamy sumowanie w (5.27) od $m = 1$, zatem można przyjąć $\lambda_m^{(i)} = \varepsilon_m^{(i)}$. Po uwzględnieniu związków (5.15) zapisujemy nieskończony układ równań (5.27) w następującej postaci:

$$(5.30) \quad -\beta_n E h k \left\{ \frac{B_n^{(i)}}{D} - A_n^{(3-i)} w_n^{(2)} + \tilde{A}_n^{(i)} w_n^{(1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta'_{nm}}{\Delta_{mn} \square_{mn}} [(-1)^n w_m^{(4)} - w_m^{(3)}] \right\} + \\ + \beta_n^2 E h \left\{ S_n^{(3-i)} v_n^{(2)} - \tilde{S}_n^{(i)} v_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\square_{mn}} [(-1)^n u_m^{(2)} - u_m^{(1)}] \right\} - (-1)^i \frac{a}{2} [(-1)^n - 1] r^{(i)} = 0,$$

$$i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdzie:

$$(5.31) \quad S_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} \frac{\alpha_m^2}{\square_{mn}}, \quad \tilde{S}_n^{(i)} = S_n^{(i)} - (-1)^i \frac{a F^{(i)}}{2h},$$

$$(5.32) \quad B_n^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(i)} \frac{\alpha_m p_{mn}}{\Delta_{mn} \square_{mn}}.$$

Należy jeszcze zapisać równania umożliwiające spełnienie warunku $u = 0$, $v = 0$ w narożach powłoki. Po wykorzystaniu wzorów (3.2) i (4.24) znajdujemy:

$$u(l_i, l_j) = \frac{2}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(i)} u_m^{(j)}, \quad v(l_i, l_j) = \frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(i)} u_n^{(j)},$$

$$i = 1, 2., \quad j = 3, 4., \quad i = 3, 4., \quad j = 1, 2..$$

Dodając i odejmując stronami powyższe równania dla $i = 1, 2$ oraz dla $i = 3, 4$ otrzymujemy:

$$(5.33) \quad \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^m - 1] u_m^{(j)} = 0, \quad \frac{b}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] u_n^{(j)} = 0,$$

$$j = 3, 4., \quad j = 1, 2.,$$

$$(5.34) \quad \sum_{m=0}^{\infty} [(-1)^m - 1] \lambda_m u_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n - 1] \lambda_n u_n^{(j)} = 0,$$

$$j = 3, 4., \quad j = 1, 2..$$

Równania (5.21), (5.30), (5.33) nie zawierają współczynników $u_0^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4.$, współczynniki te obliczamy korzystając z równań (5.34).

Związki (5.21), (5.30), (5.33), (5.34) uzupełnione odpowiednimi równaniami dla brzegów $y = 0$, $y = b$ stanowią nieskończony układ algebraicznych równań liniowych o symetrycznej macierzy współczynników z niewiadomymi $u_m^{(i)}$, $w_m^{(i)}$, $r^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Należy zwrócić uwagę, że niewiadome poziome reakcje w narożach $r^{(i)}$ istnieją również wtedy, gdy sztywności żeber $EF^{(i)}$ równe są zeru.

Rozwiązując skończoną liczbę równań tego układu można obliczyć w/w niewiadome i wyznaczyć ze wzoru (5.15) współczynniki w_{mn} . W efekcie umożliwia to znalezienie współczynników u_{mn} , v_{mn} a następnie wyznaczenie funkcji opisujących przemieszczenia i siły wewnętrzne.

Jeżeli powłoka rozpięta jest na planie kwadratu $\left(a = b, \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \alpha_n = \beta_n = \frac{n\pi}{a}\right)$ i obciążona symetrycznie wtedy otrzymany uprzednio układ równań ulega znacznej redukcji:

$$(5.35) \quad \frac{1}{2} Q_n - D \left[\bar{R}_n w_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \gamma_{mn}''' w_m \right] - E h k \alpha_n \left[\bar{A}_n v_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\alpha_m \alpha'_{mn}}{(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \square_{mn}} u_m \right] = 0$$

$$- \frac{\kappa^4}{2k} \alpha_n B_n - E h k \alpha_n \left[\bar{A}_n w_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\alpha_m \alpha'_{nm}}{(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \square_{mn}} w_m \right] -$$

$$- E h \alpha_n^2 \left[\bar{S}_n v_n + \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{\square_{mn}} u_m \right] - \frac{a}{2} r = 0,$$

$$(5.35) \quad -\frac{a}{2} \sum_{m=1,3}^{\infty} u_m = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

[cd.]

$$\bar{A}_n = \frac{1}{2}(A_n + \tilde{A}_n), \quad \bar{R}_n = \frac{1}{2}(R_n + \tilde{R}_n), \quad \bar{S}_n = \frac{1}{2}(S_n + \tilde{S}_n).$$

Niewiadomymi w układzie równań (5.35) są współczynniki u_m , w_m , r .

Ugięcia środkowej powierzchni powłoki określone są teraz następująco:

$$(5.36) \quad w(x, y) = w^0(x, y) + \frac{8}{a^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} w_m \{ [F_m^{(3)}(x) + (2-\nu)\alpha_m^2 F_m^{(1)}(x)] \sin \alpha_m y + \\ + [F_m^{(3)}(y) + (2-\nu)\alpha_m^2 F_m^{(1)}(y)] \sin \alpha_m x \} - \\ - \frac{8}{Da^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} u_m \alpha_m [F_m^{(1)}(x) \sin \alpha_m y + F_m^{(1)}(y) \sin \alpha_m x].$$

Występujące we wzorze (5.36) składniki z indeksem (0) oznaczają ugięcie określone dla powłoki podpartej przegubowo przesuwnie (zgodnie z warunkami (5.8)). Wielkość ta została wyrażona za pomocą wzoru (5.10). Symbole $F_m^{(1)}$, $F_m^{(3)}$ oznaczają sumy trygonometrycznych szeregów funkcyjnych. Sumy te można przedstawić w postaci zamkniętej [12].

Pozostałe przemieszczenia oraz siły wewnętrzne można określić w podobny sposób.

6. Rozwiązania numeryczne

Na podstawie algorytmu przedstawionego w poprzednim punkcie zbudowano program na EMC Odra 1204 (zestaw D) w języku Algol 1204.

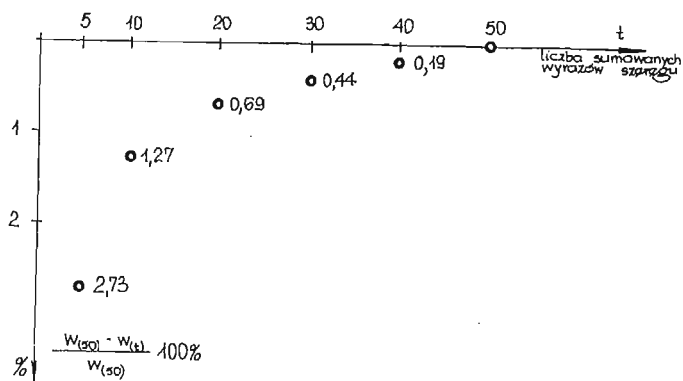
Program STF (Skończona Transformacja Fouriera) umożliwia obliczanie przemieszczeń, momentów zginających i skręcających oraz sił normalnych i stycznych dla powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej o krawędziach wzmocnionych żebrami, rozpiętej na planie kwadratu. Powłoka poddana została działaniu obciążenia ciągłego $p = \text{const}$. W programie uwzględniono możliwość sprężystego podparcia naroży w kierunkach osi x i y .

Mając na uwadze symetrię ustroju i obciążenia względem osi $x = a/2$, $y = a/2$ obliczono wielkości geometryczne i statyczne dla 1/4 powłoki.

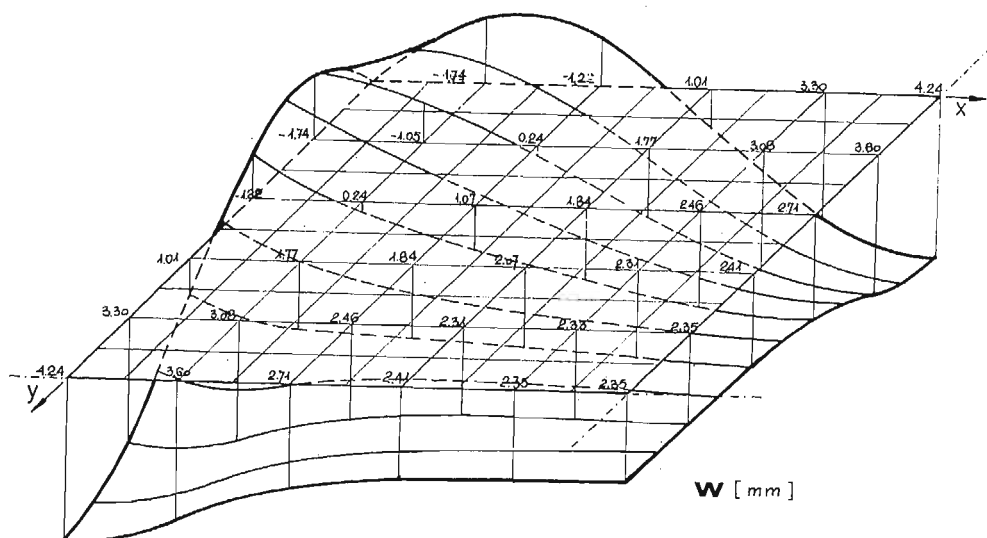
Za pomocą programu STF przeprowadzono analizę czterech następujących przykładów:

Przykład 1.

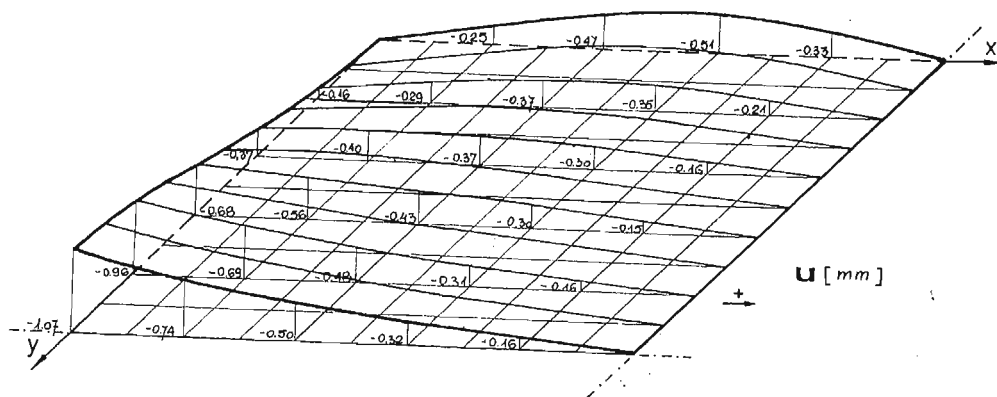
Wyznaczono przemieszczenia i siły wewnętrzne dla powłoki o swobodnych brzegach przy następujących danych: $a = 20.0$ m — rozpiętość powłoki, $k = 0.04$ 1/m — krzywizna powłoki, $h = 0.06$ m — grubość powłoki, $E = 3.4 \times 10^7$ kN/m² — moduł Younga, $\nu = 1/6$ — współczynnik Poissona, $p = 3$ kN/m² — obciążenie. Zbadano zbieżności uzyskanego rozwiązania porównując wartości maksymalnego ugięcia powłoki wyznaczone przy uwzględnieniu 5, 10, 20, 30, 40, 50 wyrazów szeregu (rys. 5).



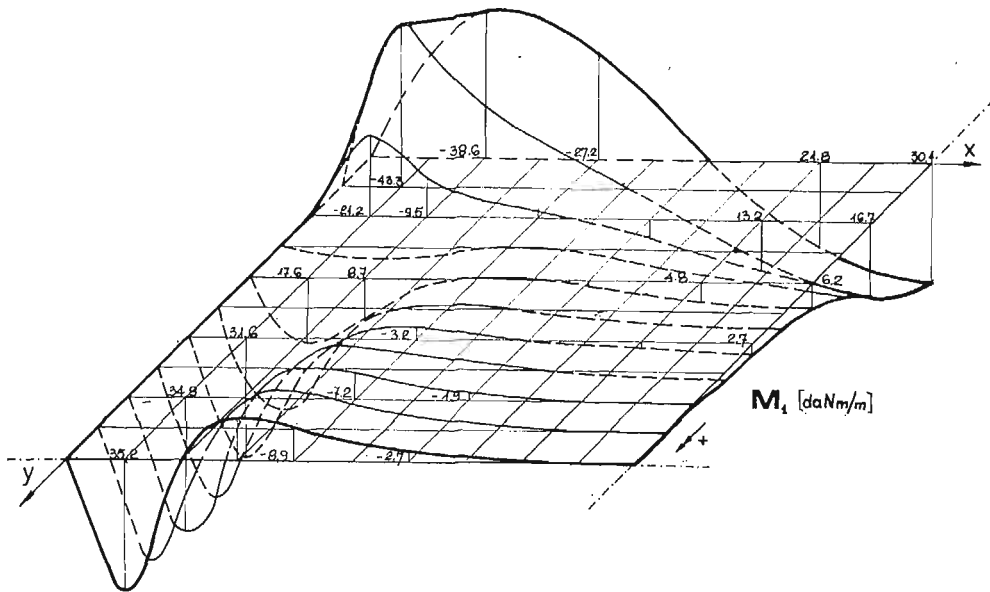
Rys. 5



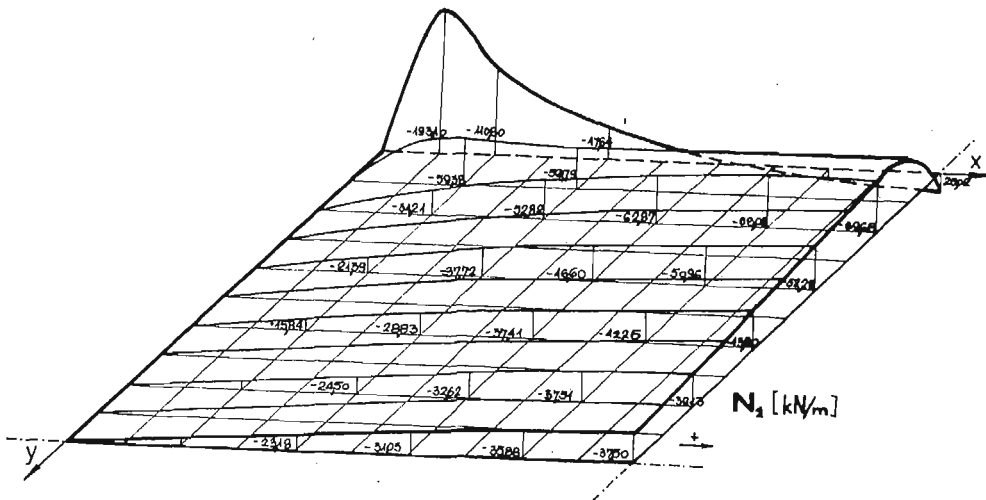
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



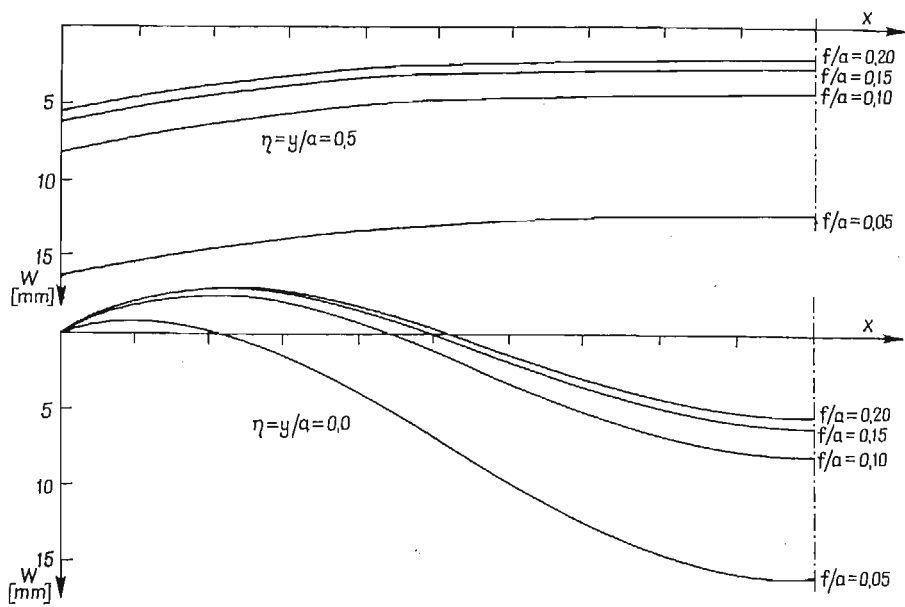
Rys. 9

Przykład 2.

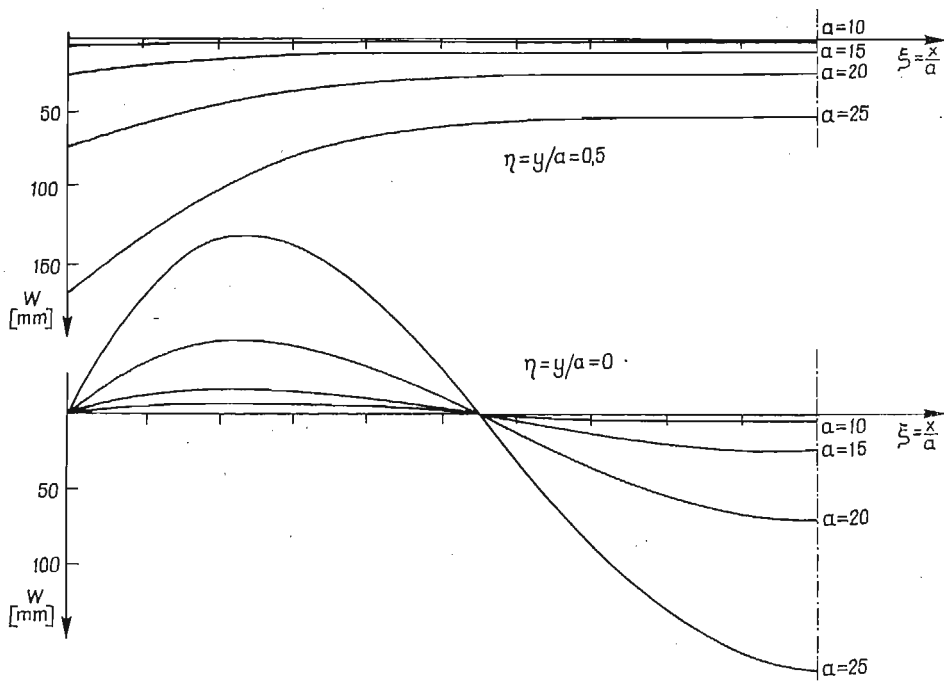
Brzeg powłoki wzmocniony żebrami o przekroju prostokątnym $0.2 \times 0.4 \text{ m}$, $J_1 = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ — moment bezwładności żebra, $F = 8.0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ — pole przekroju żebra. Pozostałe dane jak w przykładzie 1. Wyniki przedstawiono na rys. 6÷9.

Przykład 3.

Zbadano wpływ wyniosłości powłoki na kształt powierzchni ugięcia. Przyjęto: $a = 10 \text{ m}$, $f/a = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$: pozostałe dane jak w przykładzie 1. Na rys. 10 przedstawiono ugięcia powłoki wzdłuż osi symetrii oraz wzdłuż brzegu.



Rys. 10



Rys. 11

Przykład 4.

Analizie poddano wpływ rozpiętości powłoki na wielkość ugięcia. Przy stałej wyniosłości $f/a = 0.2$ przyjmowano: $a = 5, 10, 15, 20, 25$ m.

7. Analiza wyników i wnioski

W rozwiązaniu problemu brzegowego założono, że poziome reakcje narożne przyłożone są styczne do krawędzi powłoki: dlatego też na brzegu w okolicynaroża siły N_1 i N_2 dążą do zera, a siły styczne N_{12} przyjmują wartości niezerowe. Zaburzenia te mają charakter lokalny i wynikają z przyjętego sposobu transformacji równań równowagi.

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń można podać kilka szczegółowych wskazań dotyczących projektowania rozważanego ustroju.

1. Szczególne wyteżenie materiału powłoki występuje w okolicy naroża. Spowodowane jest ono, jak można sądzić, działaniem dużych reakcji skupionych. Obliczone reakcje wynoszą:

— dla powłoki bez żeber $R_z = 300$ kN, $R_x = R_y = 436$ kN

— dla powłoki z żebrami $R_z = 300$ kN, $R_x = R_y = 437$ kN.

Należy zwrócić uwagę na istnienie w pobliżu podpory bardzo dużych momentów zginających rozciągających górne włókna powłoki.

2. Nieprzesuwność naroży jest podstawowym wymogiem gwarantującym małe przemieszczenia środkowej powierzchni powłoki. Pomimo że paraboloida eliptyczna jest powierzchnią nierozwijałną, to jednak przemieszczenia wyznaczone dla powłoki o przesuwnych narożach wykraczają znacznie poza zakres dopuszczający stosowanie liniowej teorii powłok.

3. Analiza wyników z przykładów 1 i 2 wskazuje wyraźnie na korzystny wpływ żebra krawędziowego. Współpraca żebra powoduje znaczne zmniejszenie wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych bez istotnej zmiany sposobu pracy powłoki.

4. W środkowym obszarze powłoki panuje stan naprężeń zbliżony do bezmomentowego. Modyfikacja warunków brzegowych wpływa nieznacznie na siły wewnętrzne w tym obszarze.

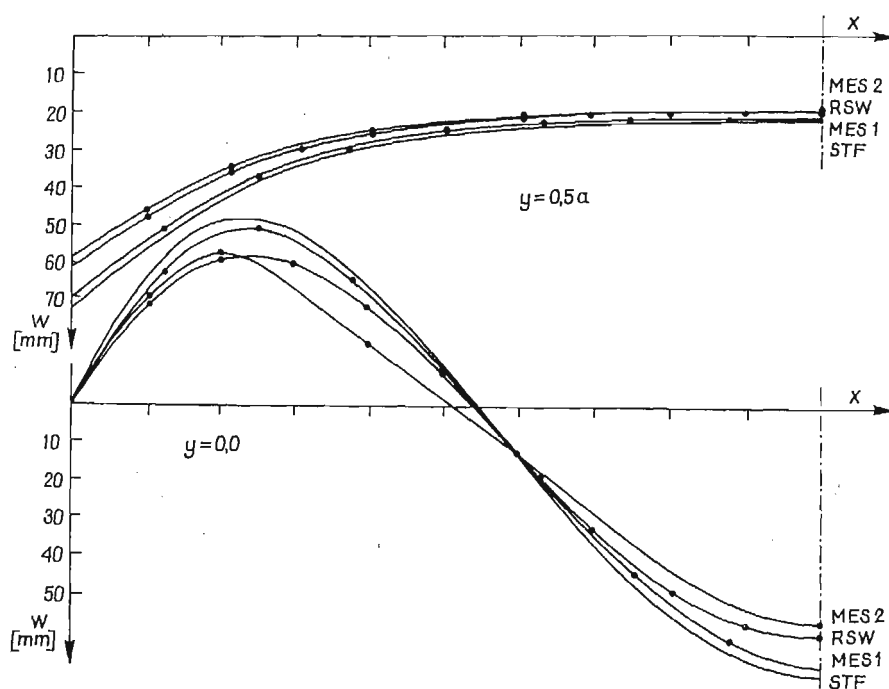
Powyższe uwagi zgodne są z wnioskami uzyskanymi na podstawie badań modelowych [11]. Ze względu na brak dokładnych danych dotyczących modelu nie przeprowadzono analizy porównawczej wyników.

Wyniki otrzymane za pomocą przedstawionej w pracy metody (STF) wykazują zadowalającą zgodność z wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu metod numerycznych t.j. metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym (RSW) i dwóch wersji metody elementów skończonych (MES 1, MES 2).

Rozwiązania wykorzystujące metodę elementów skończonych znaleziono przy podziale jednej czwartej powłoki na 25 elementów, przy czym w wersji MES 1 podział jest równomierny, a w MES 2 podział zagęszczono w okolicy naroża. Obliczenia wersji MES 1 zostały przeprowadzone w University of Wales w Swansea. Przyjęto elementy prostokątne o 28 stopniach swobody (semiloof shell element). Rozwiązanie oznaczone MES 2 otrzymane zostało

za pomocą programu opisanego w pracy [9], obliczenia wykonano w WAT w Warszawie. W przypadku metody RSW przyjęto podział 10×10 , natomiast w rozwiązaniu za pomocą skończonej transformacji Fouriera uwzględniono 30 wyrazów szeregu. Na rys. 12 przedstawiono wykresy ugięć powłoki w przekrojach $y = 0$, $y = a/2$ otrzymane za pomocą w/w metod (dane jak dla przykładu 1).

Zamieszczone w pracy przykłady liczbowe dotyczą powłoki rozpiętej na planie kwadratu i obciążonej równomiernie. Łatwo zauważyć, że opracowany algorytm numeryczny metody skończonej transformacji Fouriera można bez trudności zastosować w przypadku prostokątnego planu powłoki i dowolnego obciążenia. Można wtedy również otrzymać zamkniętą postać współczynników macierzy nieskończonych układów równań oraz przedstawić za pomocą pojedynczych szeregów poszukiwane funkcje opisujące wielkości geometryczne i statyczne. Możliwe jest też uwzględnienie innych schematów współpracy żeber.



Rys. 12

Podstawowe zalety zbudowanego algorytmu metody STF to: stabilność układu równań i szybka zbieżność rozwiązania. Program wykorzystujący ten algorytm cechuje mała liczba transmisji danych, małe wymagania dotyczące pamięci zewnętrznej, krótki czas działania i duża elastyczność. Wymienione zalety predysponują zastosowanie metody STF w przypadku wielokrotnego rozwiązywania tego samego problemu przy różnych parametrach (np. w zagadnieniach optymalizacyjnych).

W podsumowaniu można wnioskować, że w odniesieniu do przykładu opisanego w pracy, przy wykorzystaniu niedużych EMC, najbardziej efektywna jest metoda skończonej

transformacji Fouriera. Przy zastosowaniu tej metody wyniki wykazują najlepszą zbieżność, a wartości uzyskane za pomocą metod numerycznych (RSW, MES1, MES2) dążą do w/w wyników w miarę zwiększania liczby stopni swobody dyskretyzowanej powłoki.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Z. WŁASOW, *Obszczaja teoria oboloczek i jejo priloženije w technike*, Gos. Izdat. Techniko-Teoret. Lit. Moskwa, Leningrad (1949).
2. A. A. NAZAROW, *Osnovy teorii i metody raszczeta pologich oboloczek*, Izdat. Lit. po Stroit. Moskwa, Leningrad (1966).
3. P. SEIDE, *Smal Elastic Deformation of Thin Shells*, Noordhoff Int. Pub. Leyden (1975).
4. Z. MAZURKIEWICZ, *General Solution of the Dynamics and Statics Problem of Shallow Elastic Shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 15 z. 9 (1967).
5. Z. MAZURKIEWICZ, A. WIWEGER, *Static and Dynamic Problems of Elastic Shells of Small Rise*, Arch. Mech. Stos. 2. 20 (1968).
6. E. BIELEWICZ, J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Analiza statyczna przekrycia jednosłupowego*, Arch. Inż. Łąd., 1, 13 (1967).
7. E. MALERSKI, *Analiza statyczna przekrycia złożonego z powłok HP*, Inż. i Bud., 6 (1971).
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa (1972).
9. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, W. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa (1973).
10. J. J. CONNOR, C. BERBBIA, *Stiffnes Matrix for Shallow Rectangular Shell Element*, Journal of the Engineering Mechanics Divison, ASCE Vol. 93, No. 5 Oct. 1967.
11. O. DĄBROWSKI, *Badania modelowe zaburzeń brzegowych w dwukrzywiwiznowej powloce wypukłej*, Inż. i Bud. 4 (1962).
12. K. H. ŻMIJEWSKI, *Zginanie sprężystej powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej podpartej na żebrach*, Praca dokt. Politechnika Warszawska, (1977).

Р е з ю м е

ИЗГИБ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В ВИДЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА ОПЕРТОГО НА РЕБРАХ

Рассматривается задача изгиба упругой, пологой и тонкой оболочки, в виде эллиптического параболоида, растянутой на плане квадрата и опертой на упругих ребрах. Исходной точкой является система трех дифференциальных уравнений в перемещениях известна из технической теорий оболочек В. З. Власова.

Решение, выполняющее краевые условия получено методом конечной трансформации Фурье. Задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Неизвестными являются коэффициенты разложения перемещений на краях оболочки в ряд Фурье и горизонтальная угловая реакция.

В работе даны численные примеры перемещений и внутренних сил в равномерно нагруженной оболочке. Результаты сравнены с результатами полученными численными методами (конечных разностей и конечных элементов).

S u m m a r y

BENDING OF AN ELASTIC SHELL IN THE FORM OF AN ELLIPTIC PARABOLOID
SUPPORTED ON RIBS

Bending problem is considered of an elastic, shallow, thin shell in the form of an elliptic paraboloid, stretched over a square and supported on elastic ribs. A point of departure constitutes system of three differential equations in terms of displacements, known from the technical shell theory of V. Z. Vlasov [1].

In order to obtain a solution satisfying the boundary conditions the method of finite Fourier transform has been applied. The problem has been reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations. The unknowns in the system are the coefficients of the expansion of the displacements on the shell boundary in to the single Fourier series and the horizontal corner reaction.

Numerical examples of displacements and internal forces have been computed for a shell loaded uniformly. The results have been compared with those obtained by numerical methods (finite differences and finite elements).

INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 września 1978 roku.
