

LOSOWE DRGANIA LINII WAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM ASYMETRII  
SZTYWNOŚCI GIĘTNEJ I PODATNOŚCI FUNDAMENTÓW

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Wpływ procesów stochastycznych na liniowe i niezmiennie w czasie układy ciągłe może być określony przy pomocy funkcji przenoszenia, stanowiących transformaty Fouriera (względem czasu i zmiennych przestrzennych) impulsowych funkcji przejścia [1]. Rozpatrywane w pracach [2] i [3] liniowe układy nie są niezmiennie w czasie, gdyż zawierająca kołowo asymetryczne odcinki linia wałów wiruje względem podatnej konstrukcji podpierającej. Bezpośrednie wykorzystanie znanych z literatury zależności nie jest tu zatem możliwe. Podatność konstrukcji podpierającej stwarza dodatkową komplikację zagadnienia, gdyż losowe drgania linii wałów stają się przez to funkcją nie tylko wymuszeń stochastycznych o znanych charakterystykach, lecz także nieznanymi a priori losowych reakcji w łożyskach. Oznacza to również konieczność wyznaczania funkcji przenoszenia nie tylko na drodze: źródła znanych wymuszeń — badany przekrój linii wałów, lecz także od poszczególnych podpór łożyskowych do badanego przekroju wzdłuż linii wałów i poprzez konstrukcję podpierającą. Wymienione problemy rozpatrzono poniżej przy założeniu, że prędkość kątowna linii wałów może być traktowana jako stała.

2. Wyznaczenie funkcji przenoszenia

Niniejsza praca dotyczy podatnie podpartych linii wałów, w których nie wszystkie odcinki wykazują kołową symetrię sztywności giętnej. W charakterze przykładu przyjęto układ przedstawiony schematycznie na rys. 1, dla którego na wstępie zakłada się, że jego model w części odnoszącej się do wału korbowego zawiera odcinki wału o zróżnicowanych głównych centralnych momentach bezwładności przekroju poprzecznego [2]. Warunki brzegowe rozpatrywanej linii wałów zapisać można w ruchomych układach współrzędnych następująco:

$$(2.1) \quad p_{10\alpha} \pm m_{0\alpha} \ddot{u}_{10\alpha} \pm b_{0\alpha} \dot{u}_{10\alpha} = \pm f_{0\alpha}^w,$$

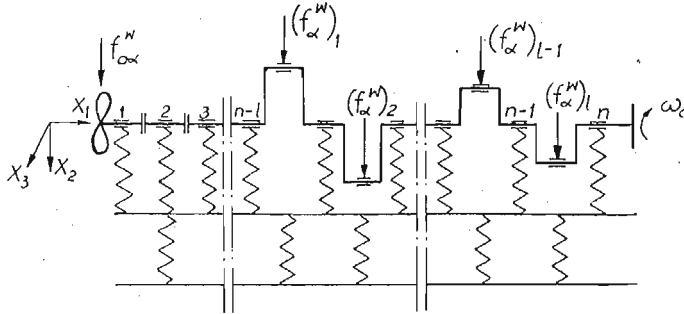
$$(2.2) \quad p_{n'l} = 0,$$

gdzie zachowano oznaczenia jak w pracy [3], przy czym  $n'$  jest liczbą obliczeniowych odcinków w rozpatrywanym układzie. Zachowuje się przyjęty w [2] podział linii wałów, zgodnie z którym wszystkie odcinki obliczeniowe obciążane są jedynie w swych końcowych przekrojach. Umożliwia to uwzględnianie losowych wymuszeń jedynie w warunkach

brzegowych dla poszczególnych odcinków oraz zastosowanie transformacji Fouriera  $\mathcal{F}$  tylko względem czasu:

$$(2.3) \quad \bar{h}(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Pozwala to bezpośrednio wykorzystać szereg zależności wyprowadzonych w [2] i [3]. Dokonując bowiem transformacji Fouriera jednorodnych równań różniczkowych cząstkowych, opisujących drgania podłużne, giętne i skrętne  $i$ -tego odcinka wału, otrzymuje się



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego układu.  $f_{0\alpha}^w = f_{0\alpha}^w(t)$  — wymuszenia działające na śrubę okrętową;  $(f_{\alpha}^w)_k = [f_{\alpha}^w(t)]_k$  — wymuszenia od silnika, działające na czop korbowy w  $k$ -tym wykorbieniu;  $l$  — liczba cylindrów silnika; 1, 2, ...,  $n$  — numery kolejnych łożysk linii wałów;  $X_1, X_2, X_3$  — nieruchomy ortogonalny układ odniesienia konstrukcji podpierającej;  $\omega_0$  — prędkość kątowa wirowania linii wałów.

równania różniczkowe zwyczajne, których rozwiązania wraz z zależnościami określającymi siły wewnętrzne zapisać można w postaci:

$$(2.4) \quad \bar{u}_{ix} = C_{ix} a_i,$$

$$(2.5) \quad \bar{p}_{ix} = A_{ix} a_i,$$

gdzie  $\bar{u}_{ix}, \bar{p}_{ix}$  są macierzami kolumnowymi transformat Fouriera uogólnionych przemieszczeń i sił wewnętrznych w przekroju  $x$   $i$ -tego odcinka wału

$$\bar{u}_{ix} = \{\bar{u}_{ix\alpha}\}, \quad \bar{p}_{ix} = \{\bar{p}_{ix\alpha}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$a_i$  jest macierzą kolumnową nieznanych współczynników rozwiązań

$$a_i = \{a_{iq}\}, \quad q = 1, \dots, 12,$$

natomiast  $C_{ix} = C_{ix}(\omega), A_{ix} = A_{ix}(\omega)$  są macierzami identycznymi z wyprowadzonymi w [2] macierzami  $C_{ix}^{(v)}, A_{ix}^{(v)}$  przy  $v = 1$  lub z macierzami  $C_{ix}^{(\mu)}, A_{ix}^{(\mu)}$  przy  $\mu = 1$  dla uściślonego modelu odcinka wału [3]:

$$(2.6) \quad C_{ix} = C_{ix}^{(1)}, \quad A_{ix} = A_{ix}^{(1)}.$$

Dla odróżnienia od wprowadzonej transformacją (2.3) wielkości  $\omega$ , prędkość kątową linii wałów oznaczono poniżej  $\omega_0$ .

W przypadku, gdy w przekroju łączącym  $i$ -ty odcinek wału z  $(i+1)$ -ym odcinkiem działają reakcje łożyska  $f_{ix}(t)$ , można dzięki relacjom (2.6) napisać:

$$(2.7) \quad a_{i+1} = B_i a_i + F_i f_i,$$

gdzie  $\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_l^{(1)}$ ,  $\mathbf{F}_l = \mathbf{F}_l^{(1)}$  określono w [3], a  $\bar{f}_l = \{\bar{f}_{l\alpha}\}$  oznacza macierz kolumnową transformat Fouriera reakcji  $f_{l\alpha}(t)$ . Podobnie wykorzystać można inne wyznaczone w [2] i [3] macierze przejścia, podstawiając  $\nu = 1$  (lub  $\mu = 1$ ). Dotyczy to również macierzy wyznaczonych dla  $\nu \neq 0$  przy podziale wału korbowego na elementy skończone [3]. Przykładowo, transformaty Fouriera wektorów stanu sztywnych elementów skończonych (SES) znajdujących się na krańcach  $k$ -tego podukładu SES, związane są relacją:

$$(2.8) \quad (\bar{w}_{m+2})_k = \mathbf{B}_s(\bar{w}_{m+1})_k + \mathbf{F}_s(\bar{f}^z)_k,$$

gdzie  $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_s^{(1)}$ ,  $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^{(1)}$  określono w [3], a macierz kolumnowa  $(\bar{f}^z)_k$ , utworzona analogicznie jak  $(f^{z(\mu)})_k$  dla  $\mu \neq 0$  [3], zawiera transformaty Fouriera reakcji konstrukcji podpierającej i wymuszeń pochodzących od silnika, przyłożonych do elementów SES w łożyskach ramowym i korbowym  $k$ -tego podukładu SES.

Wykonując transformację Fouriera warunków (2.1) i (2.2) otrzymuje się:

$$(2.9) \quad \bar{p}_{10\alpha} \pm \omega^2 m_{0\alpha} \bar{u}_{10\alpha} \pm j\omega b_{0\alpha} = \pm \bar{f}_{0\alpha}^w,$$

$$(2.10) \quad \bar{p}_{n'l\alpha} = 0.$$

Zgodnie z (2.4) i (2.5) warunek (2.9) można zapisać w postaci:

$$(2.11) \quad \bar{\mathbf{A}}a_1 = \bar{f}_0^w,$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{1x} + \bar{\mathbf{C}}_{1x}, \quad \bar{f}_0^w = \{\bar{f}_{0\alpha}^w\}.$$

Macierz  $\bar{\mathbf{A}}_{1x}$  powstaje z macierzy  $\mathbf{A}_{1x}$  przez pomnożenie czterech pierwszych jej wierszy przez  $(-1)$ ; macierz  $\bar{\mathbf{C}}_{1x}$  powstaje z macierzy  $\mathbf{C}_{1x}$  przez pomnożenie kolejnych jej wierszy przez  $(j\omega b_{01} - \omega^2 m_{01})$ ,  $(j\omega b_{02} - \omega^2 m_{02})$ , ...,  $(j\omega b_{06} - \omega^2 m_{06})$ . Warunek (2.10) można przedstawić w postaci dogodnej do dalszych obliczeń

$$(2.12) \quad \bar{\mathbf{B}}a_1 + \sum_{k=1}^l \bar{\mathbf{B}}_k(\bar{f}^w)_k + \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{B}}_i \bar{f}_i = 0$$

lub

$$(2.13) \quad \bar{\mathbf{B}}a_1 + \bar{\mathbf{B}}\bar{f}^w + \tilde{\mathbf{B}}\bar{f} = 0,$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2 \dots \bar{\mathbf{B}}_l]_{6 \times 6l}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{B}}_2 \dots \tilde{\mathbf{B}}_n]_{6 \times 6n},$$

$$\bar{f}^w = \{(\bar{f}^w)_k\}, \quad k = 1, \dots, l, \quad (\bar{f}^w)_k = \{(\bar{f}_{\alpha}^w)_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad \bar{f} = \{\bar{f}_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Macierze  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_k$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  powstaje z wymnożenia odpowiednich macierzy przejścia dla całej linii wałów,  $\bar{f}^w$  jest macierzą kolumnową transformat wymuszeń od silnika o  $l$  cylindrach,  $n$  jest liczbą łożysk linii wałów.

Korzystając z wyrażenia (2.4) oraz z odpowiednich macierzy przejścia można wyznaczyć macierze kolumnowe transformat Fouriera przemieszczeń wałów w miejscach kolejnych łożysk w postaci:

$$(2.14) \quad \bar{u}_i = \bar{\mathbf{C}}_i a_1 + \sum_{j=1}^l \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \bar{f}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-l,$$

$$(2.15) \quad \bar{u}_i = \bar{\mathbf{C}}_i a_1 + \sum_{j=1}^l \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \bar{f}_j + \sum_{h=1}^k \bar{\mathbf{C}}_{ih} (\bar{f}^w)_h, \quad i = n-l+k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Kojarząc wszystkie równania (2.14) i (2.15) otrzymuje się:

$$(2.16) \quad \bar{u} = \bar{C}a_1 + \tilde{C}\bar{f} + \bar{C}\bar{f}^w,$$

gdzie

$$\bar{u} = \{\bar{u}_i\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \bar{u} = \{\bar{u}_{i\alpha}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \vdots \\ \bar{C}_n \end{bmatrix}_{6n \times 12}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & & & & & \\ & \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tilde{C}_{nn} \end{bmatrix}_{6n},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}_{6n \times 6t}, \quad C = \begin{bmatrix} \bar{C}_{n-l+1,1} & & & & & \\ & \bar{C}_{n-l+2,1} & \bar{C}_{n-l+2,2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \bar{C}_{ln} \end{bmatrix}_{6t}$$

Oddziaływanie konstrukcji podpierającej na linię wałów jest związane z występowaniem w zależnościach (2.13) i (2.16) transformat sił  $f_{i\alpha}(t)$ , reprezentujących reakcje w łożyskach. Do wyznaczenia funkcji przenoszenia niezbędne jest uwzględnienie dynamicznych własności tej konstrukcji. Można w tym celu wykorzystać macierz impulsowych funkcji przejścia konstrukcji podpierającej

$$\mathbf{H} = [H_{ij}]_{6n}, \quad H_{ij} = [h_{ij\alpha\beta}]_6, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6,$$

gdzie  $h_{ij\alpha\beta}(t)$  jest odpowiedzią na  $i$ -tej podporze łożyskowej w kierunku  $\alpha$  w chwili  $t$  na impuls jednostkowy, przyłożony, na  $j$ -tej podporze w kierunku  $\beta$  w chwili  $t - \tau$ . Jeżeli  $u_{i\alpha}, f_{i\alpha}$  oraz  $\tilde{u}_{i\alpha}, \tilde{f}_{i\alpha}$  oznaczają uogólnione przemieszczenia i siły reakcji w funkcji czasu odnoszące się do  $i$ -tego łożyska w ruchomym układzie współrzędnych oraz w nieruchomym układzie współrzędnych, a  $\bar{u}_{i\alpha}, \bar{f}_{i\alpha}, \tilde{u}_{i\alpha}, \tilde{f}_{i\alpha}$  — transformaty Fouriera tych wielkości, to można napisać:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= -\mathbf{H} * \tilde{f}, & \bar{u} &= -\bar{\mathbf{H}} \bar{f}, \\ \tilde{u} &= \mathbf{\Pi} u, & \tilde{u} &= \bar{\mathbf{\Pi}} * \bar{u}, \\ \tilde{f} &= \mathbf{\Pi} f, & \tilde{f} &= \bar{\mathbf{\Pi}} * \bar{f}, \end{aligned}$$

gdzie zgodnie z [2] macierz  $\mathbf{\Pi}$  ma przy prędkości kątowej linii wałów  $\omega_0$  postać:

$$(2.18) \quad \mathbf{\Pi} = \Gamma \mathbf{\Pi}_i \Gamma_{6n} = \check{\mathbf{\Pi}} \exp(-j\omega_0 t) + \check{\mathbf{\Pi}} + \hat{\mathbf{\Pi}} \exp(j\omega_0 t),$$

$$\mathbf{\Pi} = \Gamma \mathbf{\Pi}'_i \Gamma_{6n}, \quad \check{\mathbf{\Pi}} = \Gamma \check{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n}, \quad \hat{\mathbf{\Pi}} = \Gamma \hat{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_{6n},$$

$$\check{\mathbf{\Pi}}_i = \Gamma \check{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_6, \quad \hat{\mathbf{\Pi}}_i = \Gamma \hat{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_6, \quad \mathbf{\Pi}'_i = \Gamma \mathbf{\Pi}'_i \Gamma_6, \quad \mathbf{\Pi}'_i = \Gamma \mathbf{\Pi}'_i \Gamma_6, \quad \hat{\mathbf{\Pi}}'_i = \Gamma \hat{\mathbf{\Pi}}'_i \Gamma_6,$$

$$\mathbf{\Pi}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_0 t + \delta_i) & -\sin(\omega_0 t + \delta_i) \\ 0 & \sin(\omega_0 t + \delta_i) & \cos(\omega_0 t + \delta_i) \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{\Pi}}'_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \exp(-j\delta_i), \quad \hat{\mathbf{\Pi}}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{\Pi}}'_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix} \exp(j\delta_i).$$

Wielkość  $\delta_i$  oznacza kąt obrotu lokalnego układu współrzędnych, w którym opisane są przemieszczenia  $u_i$  (2.11), (2.15), względem nieruchomego układu odniesienia  $x_1, x_2, x_3$  konstrukcji podpierającej (rys. 1) w kierunku wirowania linii wałów w chwili  $t = 0$ . Dla przemieszczeń (2.14) przyjęto  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{n-1} = 0$ , natomiast  $\delta_{n-l+1} = \vartheta_1, \delta_{n-l+2} = \dots = \delta_n = \vartheta_l$ , gdzie  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_l$  są kątami pomiędzy płaszczyznami kolejnych wykorbień a płaszczyzną utworzoną przez osie  $x_1, x_2$  w chwili  $t = 0$ .  $\bar{\mathbf{H}}$  i  $\bar{\mathbf{\Pi}}$  są macierzami transformat Fouriera elementów macierzy  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{\Pi}^{(1)}$ ; "\*" oznacza splot. Znaki "-" w zależnościach (2.17) wynikają stąd, że  $\tilde{f}$  reprezentuje reakcje działające na wały w łożyskach, które są równe lecz przeciwnie skierowane do sił działających na konstrukcję podpierającą. Macierze  $\mathbf{\Pi}$  są ortogonalne i równe macierzom zespolonym sprzężonym

$$(2.19) \quad \mathbf{\Pi}^{-1} = \mathbf{\Pi}^T,$$

$$(2.20) \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^*,$$

przy czym

$$(2.21) \quad \tilde{\mathbf{\Pi}}^T = \tilde{\mathbf{\Pi}},$$

$$(2.22) \quad \hat{\mathbf{\Pi}}^* = \check{\mathbf{\Pi}}.$$

Z zależności (2.17) otrzymuje się z uwzględnieniem (2.19)

$$(2.23) \quad \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{f}},$$

$$(2.24) \quad \bar{\mathbf{V}} = -\bar{\mathbf{\Pi}}^T * \bar{\mathbf{H}} * \bar{\mathbf{\Pi}}.$$

Z równań (2.11), (2.13), (2.16) i (2.23) wynika zależność

$$(2.25) \quad \bar{\mathbf{N}} \mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{S}} \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix},$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}_{12}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}_{12 \times 6(l+1)},$$

$\mathbf{E}$  — macierz jednostkowa.

Przy założeniu, że  $\bar{\mathbf{N}}$  nie jest macierzą osobliwą, zależność (2.25) pozwala z uwzględnieniem (2.4) i (2.5) napisać wyrażenie na transformatę Fouriera wektora stanu w przekroju x pierwszego odcinka wału śrubowego

<sup>1)</sup> Funkcje  $h_{l\alpha\beta}(t)$  traktuje się jako realizowalne fizycznie, zatem istnieją ich transformaty Fouriera  $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$ . Odmianą metodę wyznaczania funkcji  $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$  umożliwia fakt, że współczynnik dynamicznej podatności konstrukcji podpierającej linię wałów

$$\tilde{d}_{l\alpha\beta}^{(1)} = -\tilde{u}_{l\alpha}^{(1)} \exp(j\omega_0 t) [\tilde{f}_{l\beta}^{(1)} \exp(j\omega_0 t)]^{-1} = -\tilde{u}_{l\alpha}^{(1)} (\tilde{f}_{l\beta}^{(1)})^{-1}$$

jest dyskretną reprezentacją funkcji  $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$  w punkcie  $\omega = \omega_0$ . Funkcja  $\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega)$  może być więc wyznaczona również jako suma funkcji

$$\bar{h}_{l\alpha\beta}(\omega) = g_{l\alpha\beta}(\omega) + j\bar{g}_{l\alpha\beta}(\omega),$$

gdzie  $g_{l\alpha\beta}(\omega)$  jest równaniem krzywej obrazującej przebieg zmienności wartości części rzeczywistej współczynnika  $\tilde{d}_{l\alpha\beta}^{(1)}$  na płaszczyźnie  $\text{Re}(d_{l\alpha\beta}^{(1)})$ ,  $\omega$ , a  $\bar{g}_{l\alpha\beta}(\omega)$  jest równaniem analogicznej krzywej dla części urojonej współczynnika  $\tilde{d}_{l\alpha\beta}^{(1)}$ . Krzywe te można uzyskać interpolując w interesującym zakresie częstości dyskretne wyniki identyfikacji współczynników dynamicznej podatności konstrukcji podpierającej przy odpowiedniej liczbie kolejnych wymuszeń o różnych częstościach [2].

$$(2.26) \quad \bar{w}_{1x} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1x} \\ \bar{p}_{1x} \end{Bmatrix} = \bar{G}_{1x}^w \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix},$$

gdzie  $\bar{G}_{1x}^w = \bar{G}_{1x}^w(\omega)$  stanowi macierz funkcji przenoszenia, określonych dla wektora stanu w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego, przy wymuszeniach pochodzących od silnika i śruby okrętowej, z uwzględnieniem wpływu podatności konstrukcji podpierającej linię wałów

$$(2.27) \quad \bar{G}_{1x}^w = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \bar{N}^{-1} \bar{S}.$$

Analogicznie wyznaczyć można macierze funkcji przenoszenia dla wektorów stanu (przemieszczeń lub sił wewnętrznych) w innych przekrojach linii wałów lub dla przemieszczeń elementów skończonych w podukładach wału korbowego.

### 3. Drgania linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności gładkiej i podatności fundamentów przy wymuszeniach stochastycznych

W niniejszej pracy zakłada się, że losowe drgania rozpatrywanej linii wałów są wynikiem wymuszeń pochodzących zarówno od śruby okrętowej jak i od silnika. Wymuszenia te traktuje się jako procesy stochastyczne o wartościach oczekiwanych równych zeru.

Tworzymy procesy wektorowe:

$$\begin{aligned} f_1^w &= \{f_{0\alpha}^w\}, & \alpha &= 1, \dots, 6, \\ f^w &= \{(f^w)_k\}, & k &= 1, \dots, l, & (f^w)_k &= \{(f_\alpha^w)_k\}, & \alpha &= 1, \dots, 6, \\ f &= \{f_i\}, & i &= 1, \dots, n, & f_i &= \{f_{i\alpha}\}, & \alpha &= 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

gdzie:

$f_{0\alpha}^w = f_{0\alpha}^w(t)$  losowe wymuszenia od śruby okrętowej,

$(f_\alpha^w)_k = [f_\alpha^w(t)]_k$  losowe wymuszenia od silnika,

$f_{i\alpha} = f_{i\alpha}(t)$  losowe reakcje, działające na wał w łożyskach.

W/w procesy odnoszą się do ruchomych układów współrzędnych. Z kolei tworzymy  $N$ -wymiarowy proces stochastyczny

$$(3.1) \quad y = \begin{Bmatrix} f_0^w \\ f^w \end{Bmatrix} = \{y_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad N = 6(l+1)$$

i macierz korelacyjną

$$(3.2) \quad \mathbf{R}^{yy} = [\varrho_{n_1 n_2}^{yy}]_N, \quad n_1, n_2 = 1, \dots, N,$$

gdzie:

$$(3.3) \quad \varrho_{n_1 n_2}^{yy} = \langle y_{n_1}(t_1) y_{n_2}^*(t_2) \rangle = \langle y_{n_1}(t+\tau) y_{n_2}^*(t) \rangle,$$

$\langle \rangle$  — wartość oczekiwana, (\*) — wielkość zespolona sprzężona. Rozpatrzmy przypadki:

I. losowe wymuszenia są procesami stacjonarnymi (całkowicie lub w szerszym sensie) i ich funkcje korelacyjne mają postać:

$$(3.4) \quad \bigwedge_{n_1} \bigwedge_{n_2} \varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1, t_2) = \varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1 - t_2) = \varrho_{n_1 n_2}^{yy}(\tau),$$

II. losowe wymuszenia są procesami niestacjonarnymi, przy czym ich funkcje korelacyjne są bezwzględnie całkowlane na płaszczyźnie  $t_1 t_2$

$$(3.5) \quad \bigwedge_{n_1} \bigwedge_{n_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty,$$

III. losowe wymuszenia są procesami niestacjonarnymi, przy czym ich funkcje korelacyjne spełniają warunku (3.5).

**Ad I.** Ze względu na zmienność rozpatrywanego układu w czasie, założenie (3.4) w ogólnym przypadku nie musi za sobą pociągać spełnienia analogicznego warunku przez funkcje autokorelacji i korelacji wzajemnej losowych procesów, zachodzących w linii wałów. W celu uwidocznienia właściwości procesów zachodzących w linii wałów posłużymy się warunkami brzegowymi (2.11) i (2.13), z których wyznaczyć można transformatę Fouriera wektora stanu w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego

$$(3.6) \quad \bar{w}_{1,x} = \begin{bmatrix} C_{1,x} \\ A_{1,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -\bar{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{B} \end{bmatrix} \bar{f} \right).$$

Analogiczne relacje wyznaczyć można dla dowolnych punktów linii wałów, zatem procesy zachodzące w linii wałów będą stacjonarne wtedy, gdy procesy wektorowe  $y$  i  $f$  będą stacjonarne i stacjonarnie skorelowane. Stacjonarność procesu  $f$  zbadamy na przykładzie drgań poprzecznych wału w miejscu  $i$ -tej podpory łożyskowej odcinka o kołowej symetrii sztywności giętej<sup>2)</sup>. Dla uproszczenia rozważań pominiemy wpływ podatności fundamentu, jedynie podporę łożyskową traktować będziemy jako idealnie sprężystą, dla której macierz podatności  $D_{ii}$  jest diagonalna, o współczynnikach podatności  $1/C_{i2}$  w kierunku pionowym i  $1/c_{i3}$  w kierunku poziomym. Pomiedzy reakcjami  $f_i$  i przemieszczeniami  $u_i$  w miejscu  $i$ -tej podpory łożyskowej istnieje zależność analogiczna do (2.23)

$$u_i = -\Pi_i^T D_{ii} \Pi_i f_i,$$

czyli

$$(3.7) \quad f_i = \Pi_i^T D_{ii}^{-1} \Pi_i u_i.$$

Utwórzmy macierze korelacyjne

$$R_{ff}^i = [\varrho_{ii\alpha\beta}^{ff}]_6, \quad R_{ii}^{uu} = [\varrho_{ii\alpha\beta}^{uu}]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6,$$

gdzie:

$$\varrho_{ii\alpha\beta}^{ff} = \langle f_{i\alpha}(t+\tau) f_{i\beta}^*(t) \rangle, \quad \varrho_{ii\alpha\beta}^{uu} = \langle u_{i\alpha}(t+\tau) u_{i\beta}^*(t) \rangle$$

i założmy, że

$$(3.8) \quad \bigwedge_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \varrho_{ii\alpha\beta}^{uu} = (t, t+\tau) = \varrho_{ii\alpha\beta}^{uu}(\tau).$$

Można zatem na podstawie (3.7) i (2.20) napisać:

$$(3.9) \quad R_{ff}^i = \Pi_i^T(t+\tau) D_{ii}^{-1} \Pi_i(t+\tau) R_{ii}^{uu}(\tau) \Pi_i^T(t) (D_{ii}^{-1})^T \Pi_i(t),$$

<sup>2)</sup> Dla takiego odcinka macierz  $\Pi_i$  (2.18) nie zawiera nieistotnego w poniższych rozważaniach kąta przesunięcia fazowego ( $d_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

skąd

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \varrho_{ii22}^{ff} & \varrho_{ii23}^{ff} \\ \varrho_{ii32}^{ff} & \varrho_{ii33}^{ff} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega_0(t+\tau) & \sin \omega_0(t+\tau) \\ -\sin \omega_0(t+\tau) & \cos \omega_0(t+\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i2} & 0 \\ 0 & c_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0(t+\tau) & -\sin \omega_0(t+\tau) \\ \sin \omega_0(t+\tau) & \cos \omega_0(t+\tau) \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \varrho_{ii22}^{uu} & \varrho_{ii23}^{uu} \\ \varrho_{ii32}^{uu} & \varrho_{ii33}^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i2} & 0 \\ 0 & c_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix}, \\ \varrho_{ii22}^{ff} &= \frac{1}{4} \left\{ \varrho_{ii22}^{uu} (c_{i2} + c_{i3})^2 + \frac{1}{2} [(\varrho_{ii22}^{uu} + \varrho_{ii33}^{uu}) \cos 2\omega_0 \tau + (\varrho_{ii32}^{uu} - \varrho_{ii23}^{uu}) \sin 2\omega_0 \tau + \right. \\ &+ (\varrho_{ii22}^{uu} - \varrho_{ii33}^{uu}) \cos 2\omega_0(2t + \tau) - (\varrho_{ii23}^{uu} + \varrho_{ii32}^{uu}) \sin 2\omega_0(2t + \tau)] (c_{i2} - c_{i3})^2 + \\ &+ [\varrho_{ii22}^{uu} \cos 2\omega_0(t + \tau) + \varrho_{ii22}^{uu} \cos 2\omega_0 t - \varrho_{ii23}^{uu} \sin 2\omega_0(t + \tau) - \\ &\left. - \varrho_{ii32}^{uu} \sin 2\omega_0 t] (c_{i2}^2 - c_{i3}^2) \right\}. \end{aligned}$$

Z zależności (3.10) wynika, że przy założeniu (3.8) wtedy zachodzi

$$\varrho_{ii22}^{ff} = \varrho_{ii22}^{ff}(\tau),$$

gdy spełniony jest dodatkowy warunek:

$$c_{i2} = c_{i3}.$$

Dla  $c_{i2} \neq c_{i3}$  jest

$$\varrho_{ii22}^{ff} = \varrho_{ii22}^{ff}(t, t + \tau),$$

przy czym

$$\varrho_{ii22}^{ff}(t, t + \tau) = \varrho_{ii22}^{ff}(t + l_1 T_0, t + \tau + l_2 T_0)$$

( $T_0 = \pi/\omega_0$ ,  $l_1$  i  $l_2$  — dowolne liczby całkowite), co zgodnie z (3.6) oznacza, że pomimo spełnienia warunku (3.4) założenie (3.8) nie może być spełnione. Funkcja  $\varrho_{ii22}^{ff}$  nie spełnia wówczas także warunku (3.5). Identyczne uwagi odnoszą się do funkcji korelacyjnych  $\varrho_{ii23}^{ff}$ ,  $\varrho_{ii32}^{ff}$ ,  $\varrho_{ii33}^{ff}$ . Można stąd wnioskować, że przy stacjonarnych wymuszeniach procesy zachodzące w okrętowych liniach wałów, których konstrukcje podpierające są z reguły anizotropowo podatne, są procesami okresowo stacjonarnymi w szerszym sensie<sup>3)</sup>, a ich funkcje korelacyjne mają postać:

$$(3.11) \quad \varrho(t, t + \tau) = \sum_k \varrho_k(\tau) \exp(jk\omega_0 t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dla takich procesów można wyznaczyć macierze średnich gęstości widmowych mocy, zastępując ich funkcje korelacyjne uśrednionymi funkcjami korelacyjnymi

$$(3.12) \quad \bar{\varrho}(\tau) = \varrho_0(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varrho(t, t + \tau) dt$$

i dokonując transformacji Fouriera funkcji  $\bar{\varrho}(\tau)$  [4]. Po podstawieniu do (3.10) funkcji  $\varrho_{ii\alpha\beta}^{uu}$  w postaci (3.11) i wykonaniu operacji (3.12) otrzymuje się

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \bar{\varrho}_{ii22}^{ff}(\tau) &= \frac{1}{4} \bar{\varrho}_{ii22}^{uu}(\tau) (c_{i2} + c_{i3})^2 + \frac{1}{8} \{ [\bar{\varrho}_{ii22}^{uu}(\tau) + \bar{\varrho}_{ii33}^{uu}(\tau)] \cos 2\omega_0 \tau + \\ &+ [\bar{\varrho}_{ii32}^{uu}(\tau) - \bar{\varrho}_{ii23}^{uu}(\tau)] \sin 2\omega_0 \tau \} (c_{i2} - c_{i3})^2. \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> Procesy te są okresowo stacjonarne w szerszym sensie także w przypadku wymuszeń okresowo stacjonarnych w szerszym sensie, niezależnie od charakterystyk podatności konstrukcji podpierającej.



Analogicznie otrzymuje się macierz uśrednionych skrośnych funkcji korelacyjnych  $\bar{Q}_{ii\alpha\beta}^u(\tau)$  dla wymuszeń  $f_{i\alpha}$  i przemieszczeń  $u_{i\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ )

$$(3.14) \quad \bar{R}_{ii}^u(\tau) = -(\check{\Pi}_i^T D_{ii}^{-1} \hat{\Pi}_i + \check{\Pi}_i D_{ii}^{-1} \check{\Pi}_i + \hat{\Pi}_i^T D_{ii}^{-1} \check{\Pi}_i) \bar{R}_{ii}^u(\tau),$$

gdzie

$$\bar{R}_{ii}^u(\tau) = [\bar{Q}_{ii\alpha\beta}^u]_6, \quad \bar{R}_{ii}^w(\tau) = [\bar{Q}_{ii\alpha\beta}^w]_6.$$

Transformacja Fouriera wyrażenia (3.13) daje związek pomiędzy uśrednionymi gęstościami widmowymi mocy  $\bar{\gamma}(\omega)$  procesów  $f_{i2}, u_{i2}, u_{i3}$  oraz uśrednionymi gęstościami widmowymi mocy wzajemnej procesów  $u_{i2}$  i  $u_{i3}$ :

$$(3.15) \quad \bar{\gamma}_{i22}^{ff}(\omega) = \frac{1}{4} \bar{\gamma}_{ii22}^w(\omega)(c_{i2} + c_{i3})^2 + \frac{1}{16} \left\{ \bar{\gamma}_{ii22}^w(\omega - 2\omega_0) + \bar{\gamma}_{ii22}^w(\omega + 2\omega_0) + \right. \\ \left. + \bar{\gamma}_{ii33}^w(\omega - 2\omega_0) + \bar{\gamma}_{ii33}^w(\omega + 2\omega_0) + \frac{1}{j} [\bar{\gamma}_{ii32}^w(\omega - 2\omega_0) - \bar{\gamma}_{ii32}^w(\omega + 2\omega_0) + \right. \\ \left. + \bar{\gamma}_{ii23}^w(\omega + 2\omega_0) - \bar{\gamma}_{ii23}^w(\omega - 2\omega_0)] \right\} (c_{i2} - c_{i3})^2.$$

Wyrażenie (3.15) zawiera m.in. gęstości widmowe mocy uzyskane z uśrednionych funkcji korelacyjnych, zmodulowanych w wyniku wirowania wału z prędkością kątową  $\omega_0$ .

W wyrażeniach wyprowadzonych w p. 2 wpływ wirowania wałów na podatnej konstrukcji podpierającej określony jest macierzą  $\bar{V}$  (2.24). Chcąc wyznaczyć macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy losowego wektora stanu w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego wyodrębnimy tę macierz w macierzy funkcji przenoszenia  $\bar{G}_{1,x}^w$  (2.27). W tym celu wykorzystamy zależność (3.6) i wyrażenie uzyskane z zależności (2.11), (2.13), (2.16) i (2.23):

$$(3.16) \quad (\bar{V} + \bar{W})\bar{f} = \bar{Y}\bar{y},$$

gdzie:

$$\bar{W} = \bar{C} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} - \bar{C}, \quad \bar{Y} = \bar{C} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & -\bar{B} \end{bmatrix} + [0 \quad \bar{C}], \quad \bar{y} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_0^w \\ \bar{f}^w \end{Bmatrix}.$$

Ponieważ odwrotna transformacja Fouriera wyrażenia (2.24) daje

$$(3.17) \quad \mathbf{V}(t) = -\mathbf{\Pi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Pi},$$

można więc z uwzględnieniem (2.18) napisać:

$$(3.18) \quad \mathbf{V}(t) + \mathbf{W}(t) = \sum_{k=1}^5 \mathbf{V}_k(t),$$

gdzie  $\mathbf{W}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\bar{W}(\omega)]$  oznacza macierz, której jawna postać nie jest tu wykorzystywana, natomiast

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{V}_1(t) &= -\mathbf{V}_{(-2)} \exp(-2j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(-2)} &= \check{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_2(t) &= -\mathbf{V}_{(-1)} \exp(-j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(-1)} &= \check{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi} + \check{\Pi} \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_3(t) &= -\mathbf{V}_{(0)} + \mathbf{W}(t), & \mathbf{V}_{(0)} &= \check{\Pi}^T \mathbf{H} \hat{\Pi} + \check{\Pi} \mathbf{H} \check{\Pi} + \hat{\Pi}^T \mathbf{H} \hat{\Pi}, \\ \mathbf{V}_4(t) &= -\mathbf{V}_{(1)} \exp(j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(1)} &= \check{\Pi} \mathbf{H} \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T \mathbf{H} \check{\Pi}, \\ \mathbf{V}_5(t) &= -\mathbf{V}_{(2)} \exp(2j\omega_0 t), & \mathbf{V}_{(2)} &= \hat{\Pi}^T \mathbf{H} \hat{\Pi}. \end{aligned}$$

Wracając na płaszczyznę transformacji Fouriera mamy

$$(3.20) \quad \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}} = \sum_{k=1}^5 \bar{\mathbf{V}}_k.$$

Macierz  $\bar{\mathbf{Y}}$  również przedstawiamy w postaci sumy

$$(3.21) \quad \bar{\mathbf{Y}} = \sum_{k=1}^5 \bar{\mathbf{Y}}_k,$$

gdzie  $\bar{\mathbf{Y}}_k$  określone są relacjami

$$(3.22) \quad \bar{\mathbf{V}}_k \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{Y}}_k \bar{\mathbf{y}}$$

i wynoszą

$$(3.23) \quad \bar{\mathbf{Y}}_k = \bar{\mathbf{V}}_k (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{Y}}, \quad k = 1, \dots, 5.$$

Otrzymujemy stąd dogodną do dalszych rozważań postać wyrażenia określającego macierz kolumnową transformat Fouriera reakcji w łożyskach:

$$(3.24) \quad \bar{\mathbf{f}} = \left[ \sum_{k=1}^5 (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \right] \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{y}}.$$

Po podstawieniu (3.24) do (3.6) otrzymuje się

$$(3.25) \quad \bar{\mathbf{w}}_{1x} = \bar{\mathbf{G}}_{1x}^w \bar{\mathbf{y}},$$

gdzie

$$(3.26) \quad \bar{\mathbf{G}}_{1x}^w = \bar{\mathbf{Z}}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_2 \left[ \sum_{k=1}^5 (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{V}}_k (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{W}})^{-1} \right] \bar{\mathbf{Y}},$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}.$$

Rozpatrywany wektor stanu wyraża się w funkcji czasu zależnością

$$(3.27) \quad \mathbf{w}_{1x}(t) = \left[ \mathbf{Z}_1(t) + \mathbf{Z}_2(t) * \left\{ \sum_{k=1}^5 [\mathbf{V}(t) + \mathbf{W}(t)]^{-1} * \mathbf{V}_k(t) * \right. \right. \\ \left. \left. * [\mathbf{V}(t) + \mathbf{W}(t)]^{-1} \right\} * \mathbf{Y}(t) \right] * \mathbf{y}(t),$$

zatem macierz korelacyjna tego wektora przyjmuje postać:

$$(3.28) \quad R_{1x}^{ww}(t_1, t_2) = \left[ \mathbf{Z}_1(t_1) + \mathbf{Z}_2(t_1) * \left\{ \sum_{k=1}^5 [\mathbf{V}(t_1) + \mathbf{W}(t_1)]^{-1} * \mathbf{V}_k(t) * \right. \right. \\ \left. \left. * [\mathbf{V}(t_1) + \mathbf{W}(t_1)]^{-1} \right\} * \mathbf{Y}(t_1) \right] * \mathbf{R}^{yy}(t_1 - t_2) * \left[ \mathbf{Z}_1(t_2) + \mathbf{Z}_2(t_2) * \right. \\ \left. * \left\{ \sum_{k=1}^5 [\mathbf{V}(t_2) + \mathbf{W}(t_2)]^{-1} * \mathbf{V}_k(t_2) * [\mathbf{V}(t_2) + \mathbf{W}(t_2)]^{-1} \right\} * \mathbf{Y}(t_2) \right]^{*T},$$

gdzie:

$$R_{1x}^{ww}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_{1x}^{uu} & R_{1x}^{up} \\ R_{1x}^{pu} & R_{1x}^{pp} \end{bmatrix}_{12},$$

$$\begin{aligned} R_{1x}^{uu} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{uu}(t_1, t_2)]_6, & R_{1x}^{up} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{up}(t_1, t_2)]_6, & \alpha, \beta &= 1, \dots, 6, \\ R_{1x}^{pu} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{pu}(t_1, t_2)]_6, & R_{1x}^{pp} &= [\varrho_{1x\alpha\beta}^{pp}(t_1, t_2)]_6, \\ \varrho_{1x\alpha\beta}^{uu}(t_1, t_2) &= \langle u_{1x\alpha}(t_1)u_{1x\beta}^*(t_2) \rangle, & \varrho_{1x\alpha\beta}^{up}(t_1, t_2) &= \langle u_{1x\alpha}(t_1)p_{1x\beta}^*(t_2) \rangle, \\ \varrho_{1x\alpha\beta}^{pu}(t_1, t_2) &= \langle p_{1x\alpha}(t_1)u_{1x\beta}^*(t_2) \rangle, & \varrho_{1x\alpha\beta}^{pp}(t_1, t_2) &= \langle p_{1x\alpha}(t_1)p_{1x\beta}^*(t_2) \rangle \end{aligned}$$

W celu uniknięcia wykonywania operacji (3.12) na wyrażeniu (3.28) skorzystamy z twierdzenia, że jeśli funkcja  $\gamma(\omega_1, \omega_2)$ , uzyskana w wyniku podwójnej transformacji Fouriera funkcji korelacyjnej  $\varrho(t_1, t_2)$

$$(3.29) \quad \gamma(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(t_1, t_2) e^{-j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

jest sumą funkcji regularnych oraz osobliwych funkcji odpowiadających przypadkowi  $\omega_1 = \omega_2$ , to uśredniona gęstość widmowa mocy  $\bar{\gamma}(\omega)$  obejmuje jedynie funkcje osobliwe [4]. W wyniku zastosowania transformacji (3.29) do wyrażenia (3.28) otrzymuje się:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} F_{1x}^{wv}(\omega_1, \omega_2) &= [\bar{Z}_1(\omega_1) + \bar{Z}_2(\omega_1) \left\{ \sum_{k=1}^5 [\bar{V}(\omega_1) + \bar{W}(\omega_1)]^{-1} \bar{V}_k(\omega_1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [\bar{V}(\omega_1) + \bar{W}(\omega_1)]^{-1} \bar{Y}(\omega_1) \right\} \Gamma^{yy}(\omega_1) 2\pi\delta(\omega_2 - \omega_1) [\bar{Z}_1^*(\omega_2) + \\ &\quad \left. + \bar{Z}_2^*(\omega_2) \left\{ \sum_{k=1}^5 [\bar{V}^*(\omega_2) + \bar{W}^*(\omega_2)]^{-1} \bar{V}_k^*(\omega_2) [\bar{V}^*(\omega_2) + \bar{W}^*(\omega_2)]^{-1} \bar{Y}^*(\omega_2) \right\}^T \right]^T, \end{aligned}$$

przy czym zgodnie (3.19) i (3.20) zachodzą zależności:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \bar{V}(\omega_1) + \bar{W}(\omega_1) &= \sum_{k=1}^5 \bar{V}_k(\omega_1), \\ \bar{V}_1(\omega_1) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 + 2\omega_0), \\ \bar{V}_2(\omega_1) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi} + \check{\Pi} \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 + \omega_0), \\ \bar{V}_3(\omega_1) &= -\check{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \hat{\Pi} - \check{\Pi} \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi} - \hat{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi} + \bar{W}(\omega_1), \\ \bar{V}_4(\omega_1) &= -[\check{\Pi} \bar{H}(\omega_1) \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_0), \\ \bar{V}_5(\omega_1) &= -[\hat{\Pi}^T \bar{H}(\omega_1) \hat{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_1 - 2\omega_0), \end{aligned}$$

$\delta$  — dystrybucja Diraca.

Ponieważ  $\Pi^* = \Pi$ , czyli  $V^*(t) = -\Pi^T H^* \Pi$ , więc w zależności (3.30) mamy:

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \bar{V}^*(\omega_2) + \bar{W}^*(\omega_2) &= \sum_{k=1}^5 \bar{V}_k^*(\omega_2), \\ \bar{V}_1^*(\omega_2) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 - 2\omega_0), \\ \bar{V}_2^*(\omega_2) &= -[\check{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi} + \check{\Pi} \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 - \omega_0), \\ \bar{V}_3^*(\omega_2) &= -\check{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \hat{\Pi} - \check{\Pi} \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi} - \hat{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi} + \bar{W}^*(\omega_2), \\ \bar{V}_4^*(\omega_2) &= -[\check{\Pi} \bar{H}^*(\omega_2) \hat{\Pi} + \hat{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \check{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 + \omega_0), \\ \bar{V}_5^*(\omega_2) &= -[\hat{\Pi}^T \bar{H}^*(\omega_2) \hat{\Pi}] * 2\pi\delta(\omega_2 + 2\omega_0). \end{aligned}$$

Zachowując w zależności (3.30) jedynie człony istniejące przy  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  oraz uwzględniając, że  $\hat{\Pi}^* = \hat{\Pi}$ , otrzymuje się macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy procesów zachodzących w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego w postaci

$$(3.33) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{ww}(\omega) = \mathbf{P}_{(-2)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(-2)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(-1)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(-1)}^{*T}(\omega) + \\ + \mathbf{P}_{(0)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(0)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(1)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(1)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(2)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega)\mathbf{P}_{(2)}^{*T}(\omega),$$

gdzie:  $\Gamma^{yy}(\omega)$  — macierz gęstości widmowych mocy procesu (3.1),

$$\bar{\Gamma}_{1x}^{ww}(\omega) = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{1x}^{uu} & \bar{\Gamma}_{1x}^{up} \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{pu} & \bar{\Gamma}_{1x}^{pp} \end{bmatrix}_{12}, \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{uu} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{uu}(\omega)]_6, \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{up} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{up}(\omega)]_6, \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{pu} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{pu}(\omega)]_6, \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{pp} = [\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}^{pp}(\omega)]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6, \\ (3.34) \quad \mathbf{P}_{(-2)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \check{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega + 2\omega_0) \check{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(-1)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \check{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega + \omega_0) \check{\Pi} - \check{\Pi} \bar{\mathbf{H}}(\omega + \omega_0) \check{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(0)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_1(\omega) + \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \check{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega) \hat{\Pi} - \check{\Pi} \bar{\mathbf{H}}(\omega) \check{\Pi} - \hat{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega) \check{\Pi} + \bar{\mathbf{W}}(\omega)]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(1)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \hat{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega - \omega_0) \check{\Pi} - \check{\Pi} \bar{\mathbf{H}}(\omega - \omega_0) \check{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega), \\ \mathbf{P}_{(2)}(\omega) = \bar{\mathbf{Z}}_2(\omega)[- \hat{\Pi}^T \bar{\mathbf{H}}(\omega - 2\omega_0) \hat{\Pi}]^{-1} \bar{\mathbf{Y}}(\omega).$$

Odwrotna transformacja Fouriera wyznaczonych w ten sposób uśrednionych gęstości widmowych mocy  $\bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}(\omega)$  daje uśrednione funkcje korelacyjne

$$(3.35) \quad \bar{q}_{1x\alpha\beta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{1x\alpha\beta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Macierz  $\bar{\Gamma}_{1x}^{ww}$  (3.33) powstaje z wszystkich macierzy składowych macierzy funkcji przenoszenia  $\bar{\mathbf{G}}_{1x}^w$  (3.26), lecz w odróżnieniu od macierzy  $\Gamma_{1x}^{ww}$  (3.30) nie zawiera iloczynów, w których równocześnie występują macierze transformacji Fouriera zmodulowanych impulsowych funkcji przejścia konstrukcji podpierającej linię wałów o różnych głębokościach modulacji i różnych kierunkach przesunięcia widm. Wynika stąd prosta reguła tworzenia macierzy uśrednionych gęstości widmowych mocy reakcji tego typu układów na stacjonarne wymuszenia losowe:

— dla wszystkich składowych członów macierzy funkcji przenoszenia różniących się modulacją należy oddzielnie wyznaczyć macierze gęstości widmowych mocy i wyniki zsumować.

Biorąc pod uwagę zależności (3.14) i (3.34) można napisać wyrażenie na macierz uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy procesów zachodzących w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego i procesów wymuszających<sup>4)</sup>:

$$(3.36) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega) = \mathbf{P}_{(0)}(\omega)\Gamma^{yy}(\omega),$$

gdzie:

$$\bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega) = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{1x}^{uy} \\ \bar{\Gamma}_{1x}^{py} \end{bmatrix}_{12 \times N},$$

<sup>4)</sup> Wyrażenie to może również służyć do wyznaczenia macierzy  $\mathbf{P}_{(0)}(\omega)$ , gdy znane są macierze  $\Gamma^{yy}$  i  $\bar{\Gamma}_{1x}^{wy}$  (lub  $\Gamma^{yy}$  i  $\bar{\Gamma}_{1x}^{uy}$ ).

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1x}^{uy} &= [\bar{\gamma}_{1x\alpha n}^{yy}(\omega)]_{6 \times N}, & \bar{T}_{1x}^{py} &= [\bar{\gamma}_{1x\alpha n}^{py}(\omega)]_{6 \times N}, \\ \alpha &= 1, \dots, 6, & n &= 1, \dots, N, & N &= 6(l+1). \end{aligned}$$

Macierz  $\bar{G}_{1x}^w(\omega) = \mathbf{P}_{(0)}(\omega)$  można nazwać macierzą uśrednionych funkcji przenoszenia, stanowiących transformaty Fouriera względem czasu uśrednionych impulsowych funkcji przejścia analizowanego układu, określonych dla wektora stanu w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego przy wymuszeniach pochodzących od śruby okrętowej i od silnika.

Dla każdego innego przekroju  $x'$  pierwszego odcinka wału śrubowego można wykorzystać wyznaczone zgodnie z (3.33) i (3.36) macierze  $\bar{T}_{1x'}^{ww}$  i  $\bar{T}_{1x'}^{wy}$ , gdyż na podstawie (2.4), (2.5) i (3.25) otrzymuje się:

$$(3.37) \quad \bar{w}_{1x'} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1x'} \\ \bar{p}_{1x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \bar{G}_{1x}^w \bar{y},$$

$$(3.38) \quad \bar{T}_{1x'}^{ww}(\omega) = \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \bar{T}_{1x}^{ww}(\omega) \left( \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \right)^{*T},$$

$$(3.39) \quad \bar{T}_{1x'}^{wy}(\omega) = \begin{bmatrix} C_{1x'} \\ A_{1x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1x} \\ A_{1x} \end{bmatrix}^{-1} \bar{T}_{1x}^{wy}(\omega).$$

Analogicznie można wyznaczyć macierze uśrednionych gęstości widmowych mocy wektorów stanu (przemieszczeń lub sił wewnętrznych) w dowolnych przekrojach pozostałych odcinków wałów bądź macierze uśrednionych gęstości widmowych mocy przemieszczeń elementów skończonych dowolnych podukładów wału korbowego oraz macierze uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy dla tych przekrojów i podukładów.

**Ad. II.** W przypadku, gdy funkcje korelacyjne (3.3) spełniają warunek (3.5), wyznaczyć można macierz widm średniej energii wzajemnej procesów (3.1)

$$\Psi^{yy}(\omega) = [\xi_{n_1 n_2}^{yy}(\omega)]_N, \quad n_1, n_2 = 1, \dots, N.$$

Widma  $\xi_{n_1 n_2}^{yy}(\omega)$  średniej energii wzajemnej procesów  $y_{n_1}(t)$  i  $y_{n_2}(t)$  wynoszą [4]:

$$(3.40) \quad \xi_{n_1 n_2}^{yy}(\omega) = \gamma_{n_1 n_2}^{yy}(\omega, \omega),$$

przy czym  $\gamma_{n_1 n_2}^{yy}(\omega_1, \omega_2)$  jest podwójną transformatą Fouriera (3.29) funkcji korelacyjnej  $\varrho_{n_1 n_2}^{yy}(t_1, t_2)$ . Podając zatem wyrażenie

$$(3.41) \quad R_{1x}^{ww}(t_1, t_2) = G_{1x}^w(t_1) * R^{yy}(t_1, t_2) * [G_{2x}^w(t_2)]^{*T}$$

podwójnej transformacji Fouriera i uwzględniając zależność (3.40) otrzymuje się wyrażenie określające macierz widm średniej energii wzajemnej losowych procesów w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego

$$(3.42) \quad \Psi_{1x}^{ww}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \Psi^{yy}(\omega) [\bar{G}_{1x}^w(\omega)]^{*T} + \mathbf{P}_{(1)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(1)}^{*T}(\omega) + \\ + \mathbf{P}_{(-1)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-1)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(2)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(2)}^{*T}(\omega) + \mathbf{P}_{(-2)}(\omega) \Psi^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-2)}^{*T}(\omega),$$

gdzie:

$$\Psi_{1x}^{ww}(\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_{1x}^{uu} & \Psi_{1x}^{up} \\ \Psi_{1x}^{pu} & \Psi_{1x}^{pp} \end{bmatrix}_{12},$$

$$\Psi_{1x}^{uu} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{uu}(\omega)]_6, \quad \Psi_{1x}^{up} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{up}(\omega)]_6,$$

$$\Psi_{1x}^{pu} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{pu}(\omega)]_6, \quad \Psi_{1x}^{pp} = [\xi_{1x\alpha\beta}^{pp}(\omega)]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6.$$

Wykorzystując macierz uśrednionych funkcji przenoszenia  $\bar{G}_{1x}^w$ , można określić macierz widm średniej energii wzajemnej losowych procesów w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego i losowych wymuszeń

$$(3.43) \quad \Psi_{1x}^{wy}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \Psi^{yy}(\omega),$$

gdzie:

$$\Psi_{1x}^{wy}(\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_{1x}^{wy} \\ \Psi_{1x}^{py} \end{bmatrix}_{12 \times N},$$

$$\Psi_{1x}^{wy} = [\xi_{1x\alpha n}^{wy}(\omega)]_{6 \times N}, \quad \Psi_{1x}^{py} = [\xi_{1x\alpha n}^{py}(\omega)]_{6 \times N}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad n = 1, \dots, N.$$

**Ad. III.** W przypadku I funkcje korelacyjne procesów wyjściowych nie spełniają warunku (3.5). Uwzględnienie, że funkcje korelacyjne (3.3) procesów wymuszających również nie są bezwzględnie całkowalne na płaszczyźnie  $t_1, t_2$ , prowadzi do analogicznych zależności, jak dla przypadku I. Macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy losowych procesów w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego oraz macierz uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy losowych procesów w przekroju  $x$  pierwszego odcinka wału śrubowego i losowych wymuszeń wyrażają się następująco:

$$(3.44) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{ww}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) [\bar{G}_{1x}^w(\omega)^*{}^T + \mathbf{P}_{(1)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(1)}^*{}^T(\omega) + \\ + \mathbf{P}_{(-1)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-1)}^*{}^T(\omega) + \mathbf{P}_{(2)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(2)}^*{}^T(\omega) + \mathbf{P}_{(-2)}(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) \mathbf{P}_{(-2)}^*{}^T(\omega)],$$

$$(3.45) \quad \bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega) = \bar{G}_{1x}^w(\omega) \bar{\Gamma}^{yy}(\omega)$$

Macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy procesów wymuszających

$$\bar{\Gamma}^{yy}(\omega) = [\bar{\gamma}_{n_1 n_2}^{yy}(\omega)]_N, \quad n_1, n_2 = 1, \dots, N$$

otrzymuje się w wyniku dokonania podwójnej transformacji Fouriera na elementach macierzy korelacyjnej (3.2) i zachowania członów osobliwych (istniejących przy  $\omega_1 = \omega_2$ ), bądź przez poddanie tych elementów operacji (3.12) i pojedynczej transformacji Fouriera.

Dla zilustrowania przypadku tego typu procesów, wymuszenia od śruby okrętowej i od silnika przedstawimy w postaci zespolonej:

$$(3.46) \quad \check{f}_x^w = \sum_{\nu} \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} \exp(j\nu\omega_0 t), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \\ (\check{f}_\alpha^w)_k = \sum_{\nu} (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k \exp(j\nu\omega_0 t), \quad k = 1, \dots, l, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \alpha = 1, \dots, 6.$$

Przy występowaniu losowych oddziaływań zespolone amplitudy harmoniczných wymuszeń stają się zmiennymi losowymi, które mogą być przedstawione w postaci:

$$(3.47) \quad \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} = \langle \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} \rangle + f_{0\alpha}^{w(\nu)}, \\ (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k = \langle (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k \rangle + (f_\alpha^{w(\nu)})_k,$$

gdzie:

$\langle \check{f}_{0\alpha}^{w(\nu)} \rangle, \langle (\check{f}_\alpha^{w(\nu)})_k \rangle$  wartości oczekiwane,  
 $f_{0\alpha}^{w(\nu)}, (f_\alpha^{w(\nu)})_k$  zmienne losowe o wartościach oczekiwanych równych zeru.

Wartości oczekiwane parametrów drgań linii wałów mogą być wyznaczone jak w pracach [2], [3]. Poniżej rozpatrzono oddziaływanie procesów stochastycznych

$$(3.48) \quad \begin{aligned} f_{0\alpha}^w &= \sum_{\nu} f_{0\alpha}^{w(\nu)} \exp(j\nu\omega_0 t), \\ (f_{\alpha}^w)_k &= \sum_{\nu} (f_{\alpha}^{w(\nu)})_k \exp(j\nu\omega_0 t). \end{aligned}$$

Tworzymy procesy wektorowe:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} f_0^w &= \{f_{0\alpha}^w\}, \quad f^w = \{(f^w)_k\}, \quad (f^w)_k = \{(f_{\alpha}^w)_k\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \quad k = 1, \dots, l, \\ \mathbf{y} = \{f_0^w, f^w\} &= \{y_n\}, \quad y_n = \sum_{\nu} y_n^{(\nu)} \exp(j\nu\omega_0 t), \\ \nu &= 0, 1, 2, \dots, \quad \kappa = 1, \dots, N \end{aligned}$$

i macierz korelacyjną

$$(3.50) \quad R^{yy}(t_1, t_2) = [\varrho_{n_1 n_2}^{y_1 y_2}(t_1, t_2)]_N, \quad \kappa_1, \kappa_2 = 1, \dots, N,$$

gdzie:

$$(3.51) \quad \varrho_{n_1 n_2}^{y_1 y_2}(t_1, t_2) = \sum_{\nu_1} \sum_{\nu_2} \varrho_{n_1 n_2}^{\nu_1 \nu_2} \exp[j\omega_0(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)],$$

$$(3.52) \quad \varrho_{n_1 n_2}^{\nu_1 \nu_2} = \langle y_{n_1}^{(\nu_1)} (y_{n_2}^{(\nu_2)})^* \rangle, \quad \nu_1, \nu_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Macierz (3.50) może być przedstawiona w postaci sumy macierzy:

$$(3.53) \quad \begin{aligned} R^{yy}(t_1, t_2) &= [\varrho_{n_1 n_2}^{00}] + [\varrho_{n_1 n_2}^{10}] \exp(j\omega_0 t_1) + [\varrho_{n_1 n_2}^{01}] \exp(-j\omega_0 t_2) + \\ &+ [\varrho_{n_1 n_2}^{11}] \exp[j\omega_0(t_1 - t_2)] + [\varrho_{n_1 n_2}^{20}] \exp(2j\omega_0 t_1) + [\varrho_{n_1 n_2}^{02}] \exp(-2j\omega_0 t_2) + \\ &+ [\varrho_{n_1 n_2}^{21}] \exp[j\omega_0(2t_1 - t_2)] + [\varrho_{n_1 n_2}^{12}] \exp[j\omega_0(t_1 - 2t_2)] + [\varrho_{n_1 n_2}^{22}] \exp[2j\omega_0(t_1 - t_2)] + \dots, \end{aligned}$$

skąd w wyniku podwójnej transformacji Fouriera otrzymuje się

$$(3.54) \quad \begin{aligned} \Gamma^{yy}(\omega_1, \omega_2) &= (2\pi)^2 \{ [\varrho_{n_1 n_2}^{00}] \delta(\omega_1) \delta(\omega_2) + [\varrho_{n_1 n_2}^{10}] \delta(\omega_1 - \omega_0) \delta(\omega_2) + \\ &+ [\varrho_{n_1 n_2}^{01}] \delta(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_0) + [\varrho_{n_1 n_2}^{11}] \delta(\omega_1 - \omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_0) + \dots \}. \end{aligned}$$

Macierz uśrednionych gęstości widmowych mocy procesów wymuszających (3.48) stanowi zatem ciąg impulsów rozłożonych w punktach  $\omega = 0, \omega_0, 2\omega_0, \dots$ :

$$(3.55) \quad \bar{\Gamma}^{yy}(\omega) = 2\pi \{ [\varrho_{n_1 n_2}^{00}] \delta(\omega) + [\varrho_{n_1 n_2}^{11}] \delta(\omega - \omega_0) + [\varrho_{n_1 n_2}^{22}] \delta(\omega - 2\omega_0) + \dots \}$$

i równa się macierzy gęstości widmowych mocy procesów (3.48) w przypadku, gdy amplitudy harmonicznnych tych wymuszeń są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi:

$$(3.56) \quad \bigwedge_{n_1} \bigwedge_{n_2} \varrho_{n_1 n_2}^{\nu_1 \nu_2} = 0, \quad \nu_1 \neq \nu_2.$$

Macierze uśrednionych gęstości widmowych mocy  $\bar{\Gamma}_{1x}^{yy}(\omega)$  i uśrednionych skrośnych gęstości widmowych mocy  $\bar{\Gamma}_{1x}^{wy}(\omega)$  stanowią zgodnie z (3.44) i (3.45) również ciągi impulsów, różniące się amplitudami tych impulsów.

#### 4. Uwagi końcowe

Zależności wyznaczone w niniejszej pracy oraz w [2], [3] i [5] umożliwiają dokładniejszą analizę drgań linii wałów z kołowo asymetrycznymi odcinkami w porównaniu z dotychczasowymi metodami. W szczególności mogą być one wykorzystane do obliczeń drgań linii wałów zawierających wały korbowe, a częściowo także w problemach dynamiki i statyki belek wielopodporowych. Znaczenie rozpatrywanych zagadnień wynika z roli tego typu układów w praktyce.

Uzyskane wyniki mogą być przydatne w dalszych pracach, których główne kierunki winny dotyczyć m.in. optymalnej syntezy, a także doskonalenia metod praktycznej realizacji procesów identyfikacji dynamicznych własności rozpatrywanych układów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. K. SOB CZYK, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa 1973.
2. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów linii wałów*, W Redakcji Mech. Teoret. i Stos.
3. J. KOLENDA, *Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów*, Mech. Teor. i Stos., 17, 1, 1979.
4. A. PAPOULIS, *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 1972.
5. J. KOLENDA, *Metoda analizy drgań linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów przy wymuszeniach nieokresowych*, Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, „Budownictwo Okrętowe”, w druku.

#### Резюме

#### СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ

Работа касается случайных колебаний валопроводов, являющихся вместе с упругими фундаментами линейными и зависящими от времени системами с распределенными параметрами. Указывается, что при стационарных случайных возмущениях стохастические процессы, происходящие в валопроводе с асимметрией изгибной жесткости, являются вследствие ротации валопровода на упругом фундаменте периодически стационарными в широком смысле. Матрицы усредненных спектральных плотностей этих процессов содержат трансформаты Фурье модулированных импульсных функции ответа фундамента. Определяется матрица усредненных передаточных функций, которая используется для получения матрицы усредненных взаимных спектральных плотностей выходных процессов в анализируемом сечении валопровода и входных процессов. Рассматривается случай нестационарных случайных возмущений при предположении, что угловая скорость валопровода может считаться постоянной.

#### Summary

#### RANDOM VIBRATIONS OF SHAFTINGS WITH FLEXURAL RIGIDITY ASYMMETRY ON FLEXIBLE FOUNDATIONS

The paper deals with random vibrations of shaftings constituting together with flexible foundations the linear and time-dependent continua. It is shown that at stationary random excitations the stochastic processes in the shaftings with flexural rigidity asymmetry are periodically stationary in wide sense due to



rotation of shafts on flexible foundations. The matrices of averaged power spectral densities of these processes contain Fourier transforms of the modulated impulse responses of a foundation. The matrix of averaged transfer functions is defined and used to determine the averaged cross power spectral densities of output processes at the analysed shafting point and of input processes. The case of nonstationary random excitations is considered under the assumption that a rotating speed of the shafting can be treated as a constant value.

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
INSTYTUT OKRĘTOWY

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 maja 1978 r.*

---