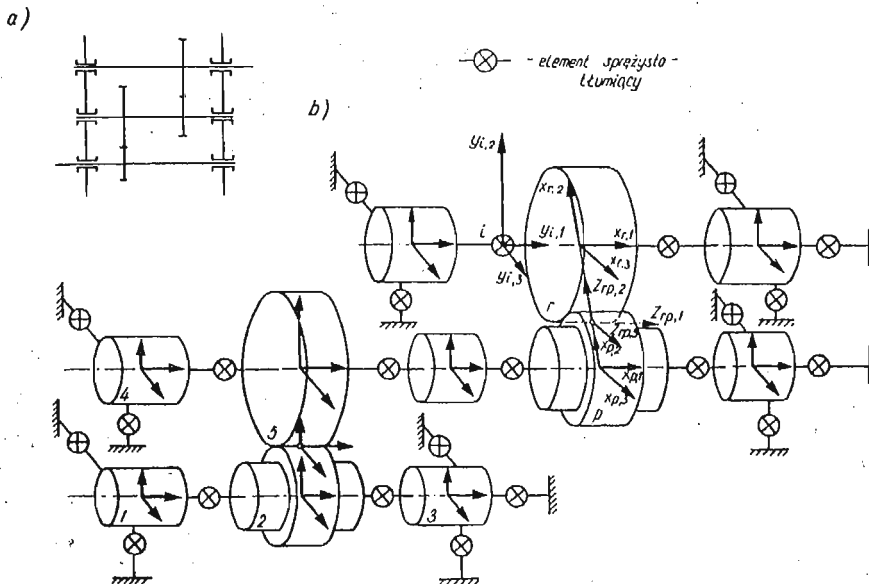


MODELOWANIE WIELOSTOPNIOWYCH PRZEKŁADNI ZĘBATYCH METODĄ SZTYWNYCH
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

STEFAN BERCZYŃSKI, HENRYK MAĆKOWIAK,
KRZYSZTOF MARCHELEK (SZCZECIN)

Metoda sztywnych elementów skończonych (SES) może być efektywnie wykorzystana do obliczeń giętno-skrętnych drgań swobodnych i wymuszonych napędów wielostopniowych z przekładniami zębatymi. W monografii [1], która jest najpełniejszym opracowaniem metody SES, problem ten nie został poruszony. W niniejszej pracy przedstawiony jest algorytm obliczeń, który stanowi rozwinięcie metody SES w jej zastosowaniu do obliczeń napędów z przekładniami zębatymi. Algorytm opracowano dla modelu przekładni zębatej przenoszącej średnie moce (np. napędy obrabiarek), w której nie występuje luz obwodowy.



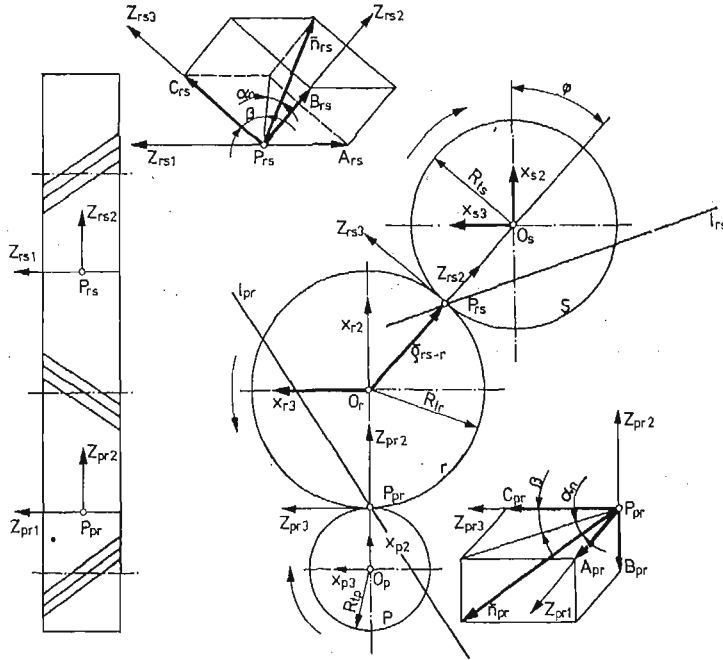
Rys. 1

Przy tworzeniu przedstawionego modelu pominięto takie zjawiska, jak zmiana kąta przyporu¹⁾ na skutek odkształceń zębów, wpływ nierównomierności rozkładu obciążenia wzdłuż linii styku zębów oraz zazębienia krawędziowego powstającego wskutek zwichrowania kół pod obciążeniem, błędów wykonawczych i montażowych oraz zjawiska giros-

¹⁾ Definicje pojęć związanych z geometrią zazębienia znaleźć można np. w [4].

kopowe. Wpływ tych czynników na procesy dynamiczne zachodzące w napędzie jest z reguły lokalny i można go w pierwszym przybliżeniu przy analizie całości napędu pominąć.

Na rys. 1. pokazano model przykładowej dwustopniowej przekładni zębatej zbudowany ze sztywnych elementów skończonych, połączonych między sobą elementami sprężysto-tłumiącymi o liniowych charakterystykach. Koła zębate są przedstawione za pomocą SES nr 2, 5, p i r .



Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono sposób modelowania zazębienia dla przypadku trzech współpracujących kół p , r , s . Przyjęto założenie, że koła współpracują ze sobą na linii przyporu.

Punkty styku P_{pr-p} , P_{pr-r} oraz P_{rs-r} i P_{rs-s} tylko w stanie równowagi pokrywają się tworząc odpowiednio punkty P_{pr} i P_{rs} (rys. 2). W czasie ruchu punkty P_{pr-p} , P_{pr-r} oraz P_{rs-r} i P_{rs-s} muszą ciągle znajdować się na odpowiednich płaszczyznach zazębienia, których ślady przecięcia z płaszczyzną rysunku oznaczono przez l_{rs} i l_{pr} . Jest to równoznaczne z nałożeniem na układ więzów geometrycznych. W punktach styku P_{pr} i P_{rs} zaczepiono układy współrzędnych P_{pr} , Z_{pr1} , Z_{pr2} , Z_{pr3} oraz P_{rs} , Z_{rs1} , Z_{rs2} , Z_{rs3} . Macierze współrzędnych punktów P_{pr-p} , P_{pr-r} i P_{rs-r} , P_{rs-s} w tych układach mają postać:

$$Z_{pr-p} = \text{col}\{Z_{pr-p1}, Z_{pr-p2}, Z_{pr-p3}\},$$

$$Z_{pr-r} = \text{col}\{Z_{pr-r1}, Z_{pr-r2}, Z_{pr-r3}\},$$

$$Z_{pr-r} = \text{col}\{Z_{rs-r1}, Z_{rs-r2}, Z_{rs-r3}\},$$

$$Z_{rs-s} = \text{col}\{Z_{rs-s1}, Z_{rs-s2}, Z_{rs-s3}\},$$

gdzie Z_{pr-p} — macierz kolumnową współrzędnych punktu P_{pr-p} w układzie P_{pr} , Z_{pr1} , Z_{pr2} , Z_{pr3} , Z_{pr-pi} — współrzędna punktu P_{pr-p} na osi Z_{pr-i} , ($i = 1, 2, 3$).

Macierze wektorów kierunkowych płaszczyzn ząbienia mają postać:

$$\mathbf{n}_{pr} = \text{col}\{A_{pr}, B_{pr}, C_{pr}\}; \quad \mathbf{n}_{rs} = \text{col}\{A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}\}.$$

Równania więzów geometrycznych (płaszczyzn ząbienia) wyrażone są wzorami:

$$(1) \quad f_{pr} = A_{pr}(Z_{pr-p1} - Z_{pr-r1}) + B_{pr}(Z_{pr-p2} - Z_{pr-r2}) + C_{pr}(Z_{pr-p3} - Z_{pr-r3}) = 0,$$

$$(2) \quad f_{rs} = A_{rs}(Z_{rs-r1} - Z_{rs-s1}) + B_{rs}(Z_{rs-r2} - Z_{rs-s2}) + C_{rs}(Z_{rs-r3} - Z_{rs-s3}) = 0.$$

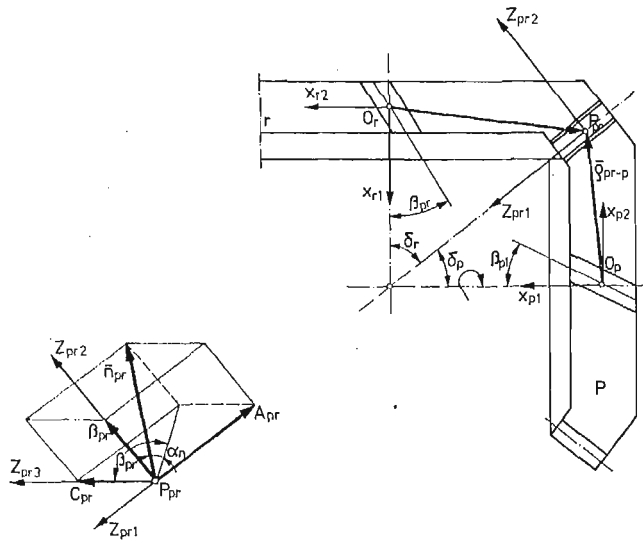
Układy współrzędnych są układami prawoskrętnymi, przy czym osie Z_{pr2} i Z_{rs2} są zwrócone do osi obrotu kół napędzanych w danej współpracującej parze.

Przy wyprowadzaniu wzorów ustalono następujące reguły:

— litera stojąca na pierwszym miejscu w indeksie oznacza koło napędzające, litera stojąca na drugim miejscu — koło napędzane, np. indeks pr oznacza, że koło napędzające ma numer p zaś koło napędzane ma numer r ,

— kierunek obrotów koła napędzającego (np. p) jest prawy, gdy układ z nim związany obraca się zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej wokół osi x_{p1} ,

— kierunek pochylenia linii zębów koła napędzającego (np. p) jest prawy, gdy rzut linii zębów na płaszczyznę osi x_{p1} , x_{p3} tworzy z osią x_{p1} kąt od 0° do 90° .



Rys. 3

Współrzędne A_{pr} , B_{pr} , C_{pr} wektora kierunkowego płaszczyzny ząbienia kół p i r opisują zależności

$$(3) \quad A_{pr} = (-1)^{j+1} \cos \alpha_n \sin \beta_{pr}, \quad B_{pr} = (-1)^i \sin \alpha_n,$$

$$C_{pr} = \cos \alpha_n \cos \beta_{pr},$$

przy czym

$$i = \begin{cases} 0 & \text{— gdy kierunek obrotów koła } p \text{ jest prawy,} \\ 1 & \text{— gdy kierunek obrotów koła } p \text{ jest lewy.} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 0 & \text{— gdy kierunek pochylenia linii zębów koła } p \text{ jest prawy,} \\ 1 & \text{— gdy kierunek pochylenia linii zębów koła } p \text{ jest lewy,} \end{cases}$$

gdzie α_n oznacza nominalny kąt przyporu koła zębatego, zaś β_{pr} kąt pochylenia linii zęba koła p .

Zależności (1) i (3) są także słuszne dla przekładni utworzonej z kół stożkowych (rys. 3). Układ współrzędnych P_{pr} , Z_{pr1} , Z_{pr2} , Z_{pr3} powinien być tak zorientowany, aby oś Z_{pr1} pokrywała się ze wspólną tworzącą stożków podziałowych obu kół p i r , zaś oś Z_{pr2} zwrócona była w kierunku osi obrotu koła napędowego r .

Równania więzów (1) i (2) należy wyrazić w tych samych współrzędnych, w których opisany jest ruch sztywnych elementów skończonych.

Jako współrzędne uogólnione opisujące ruch sztywnych elementów skończonych przyjęto trzy wzajemnie prostopadłe przemieszczenia translacyjne δ wzdłuż osi x_i oraz trzy kąty obrotów ψ wokół tych osi. Na przykład przemieszczenia uogólnione SES r i s wyrażone są zależnościami:

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_r &= \text{col}\{q_{r1}, q_{r2}, \dots, q_{r5}, q_{r6}\} = \text{col}\{\delta_r, \psi_r\}, \\ \mathbf{q}_s &= \text{col}\{q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{s5}, q_{s6}\} = \text{col}\{\delta_s, \psi_s\}, \end{aligned}$$

gdzie q_{ri} , q_{si} oznaczają przemieszczenia uogólnione kół r i s w układach $O_r, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$ i $O_s, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$.

Przemieszczenia punktów P_{rs} kół r i s w układzie $Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$ wyrazić można za pomocą współrzędnych uogólnionych, korzystając z wzorów:

$$(4a) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_{rs-r} &= \mathbf{U}_{rs-r} \mathbf{V}_{rs-r} \mathbf{q}_r, \\ \mathbf{q}_{rs-s} &= \mathbf{U}_{rs-s} \mathbf{V}_{rs-s} \mathbf{q}_s, \end{aligned}$$

przy czym

$$(4b) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_{rs-r} &= \text{col}\{q_{rs-r1}, q_{rs-r2}, \dots, q_{rs-r5}, q_{rs-r6}\} = \text{col}\{\delta_{rs-r}, \psi_{rs-r}\}, \\ \mathbf{q}_{rs-s} &= \text{col}\{q_{rs-s1}, q_{rs-s2}, \dots, q_{rs-s5}, q_{rs-s6}\} = \text{col}\{\delta_{rs-s}, \psi_{rs-s}\}, \end{aligned}$$

gdzie $q_{rs-ri} - q_{rs-si}$ oznaczają przemieszczenia kół r i s w układzie $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$.

Występujące w równaniach (4a) macierze \mathbf{U}_{rs-r} i \mathbf{U}_{rs-s} transformacji przemieszczeń z układów $O_r, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$ i $O_s, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$ do układu $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$ wyrażone są następująco:

$$(5) \quad \mathbf{U}_{rs-r} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-r}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rs-r}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{rs-s} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-s}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rs-s}^T \end{bmatrix},$$

przy czym

$$(6) \quad \mathbf{C}_{rs-r} = \mathbf{j}_r \mathbf{j}_{rs}^T, \quad \mathbf{C}_{rs-s} = \mathbf{j}_s \mathbf{j}_{rs}^T$$

oraz macierze wersorów osi układów

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_r &= \text{col}\{\bar{\mathbf{j}}_{r1}, \bar{\mathbf{j}}_{r2}, \bar{\mathbf{j}}_{r3}\}, \quad \mathbf{j}_s = \text{col}\{\bar{\mathbf{j}}_{s1}, \bar{\mathbf{j}}_{s2}, \bar{\mathbf{j}}_{s3}\}, \\ \mathbf{j}_{rs} &= \text{col}\{\bar{\mathbf{j}}_{rs1}, \bar{\mathbf{j}}_{rs2}, \bar{\mathbf{j}}_{rs3}\}. \end{aligned}$$

Wyraz $C_{rs-r(lk)}$ macierzy \mathbf{C}_{rs-r} zdefiniowany jest następująco:

$$C_{rs-r(lk)} = \cos(X_{rl}, Z_{rsk}), \quad l, k = 1, 2, 3,$$

gdzie (X_{rl}, Z_{rsk}) — oznaczają kąt zawarty między l -tą osią układu związanego z kołem r a k -tą osią układu $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$, do którego transformuje się przemieszczenia.

Macierze \mathbf{v}_{rs-r} , \mathbf{v}_{rs-s} przenoszenia przemieszczeń z układów $O_r, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}$ i $O_s, x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$ do układu $P_{rs}, Z_{rs1}, Z_{rs2}, Z_{rs3}$ są wyrażone w postaci

$$(7) \quad \mathbf{v}_{rs-r} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{v}_{rs-r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{rs-s} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{v}_{rs-s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

przy czym

$$(8) \quad \mathbf{v}_{rs-r} = \begin{bmatrix} 0 & \varrho_{rs-r3} & -\varrho_{rs-r2} \\ -\varrho_{rs-r3} & 0 & \varrho_{rs-r1} \\ \varrho_{rs-r2} & -\varrho_{rs-r1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{rs-s} = \begin{bmatrix} 0 & \varrho_{rs-s3} & -\varrho_{rs-s2} \\ -\varrho_{rs-s3} & 0 & \varrho_{rs-s1} \\ \varrho_{rs-s2} & -\varrho_{rs-s1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze (8) utworzone są ze współrzędnych wektorów $\bar{\varrho}_{rs-r} = [\varrho_{rs-r1}, \varrho_{rs-r2}, \varrho_{rs-r3}]$ i $\bar{\varrho}_{rs-s} = [\varrho_{rs-s1}, \varrho_{rs-s2}, \varrho_{rs-s3}]$ łączących środki O_r i O_s kół z punktem P_{rs} (rys. 2).

Podstawiając zależności (5), (6), (7), i (8) do wzorów (4) otrzyma się dla \mathbf{q}_{rs-r} :

$$\mathbf{q}_{rs-r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{rs-r} \\ \boldsymbol{\psi}_{rs-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-r}^T & \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{v}_{rs-r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{rs-r}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_r \\ \boldsymbol{\psi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rs-r}^T \boldsymbol{\delta}_r + \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{v}_{rs-r} \boldsymbol{\psi}_s \\ \mathbf{C}_{rs-r}^T \boldsymbol{\psi}_s \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$(9) \quad \mathbf{Z}_{rs-r} = \text{col}\{\mathbf{Z}_{rs-r1}, \mathbf{Z}_{rs-r2}, \mathbf{Z}_{rs-r3}\} = \mathbf{C}_{rs-r}^T \boldsymbol{\delta}_r + \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{v}_{rs-r} \boldsymbol{\psi}_s = \mathbf{C}_{rs-r}^T [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-r}] \mathbf{q}_r.$$

Postępując analogicznie uzyska się macierz \mathbf{Z}_{rs-s} :

$$(10) \quad \mathbf{Z}_{rs-s} = \mathbf{C}_{rs-s}^T [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-s}] \mathbf{q}_s.$$

Definiując prostokątne macierze przenoszenia przemieszczeń

jako

$$(11) \quad \mathbf{V}_{rs-r}^* = [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-r}], \quad \mathbf{V}_{rs-s}^* = [\mathbf{I} \mathbf{v}_{rs-s}],$$

wzory na postępowe przemieszczenia punktów P_{rs-r} i P_{rs-s} w układzie $P_{rs}, \mathbf{Z}_{rs1}, \mathbf{Z}_{rs2}, \mathbf{Z}_{rs3}$ wyrażone za pomocą współrzędnych przemieszczeń uogólnionych kół r i s przyjmują postać

$$(12) \quad \mathbf{Z}_{rs-r} = \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{V}_{rs-r}^* \mathbf{q}_r,$$

$$\mathbf{Z}_{rs-s} = \mathbf{C}_{rs-s}^T \mathbf{V}_{rs-s}^* \mathbf{q}_s.$$

Wzory (12) słuszne są dla dowolnej pary kół, wystarczy tylko zmienić odpowiednio indeksy.

Korzystając z wyprowadzonych zależności można równania więzów (1) i (2) przedstawić w notacji macierzowej. W tym celu definiuje się macierze:

$$(13) \quad \mathbf{n}_{pr} = \text{col}\{A_{pr}, B_{pr}, C_{pr}\}, \quad \mathbf{n}_{rs} = \text{col}\{A_{rs}, B_{rs}, C_{rs}\},$$

$$(14) \quad \mathbf{Z}_{pr}^* = \text{col}\{Z_{pr-p1} - Z_{pr-r1}, Z_{pr-p2} - Z_{pr-r2}, Z_{pr-p3} - Z_{pr-r3}\},$$

$$\mathbf{Z}_{rs}^* = \text{col}\{Z_{rs-r1} - Z_{rs-s1}, Z_{rs-r2} - Z_{rs-s2}, Z_{rs-r3} - Z_{rs-s3}\}.$$

Podstawiając zależności (13) i (14) do (1) i (2) otrzyma się równania więzów:

$$(15) \quad f_{pr} = \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{Z}_{pr}^* = 0,$$

$$(16) \quad f_{rs} = \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{Z}_{rs}^* = 0.$$

Uwzględniając, że $\mathbf{Z}_{pr}^* = \mathbf{Z}_{pr-p} - \mathbf{Z}_{pr-r}$ oraz $\mathbf{Z}_{rs}^* = \mathbf{Z}_{rs-r} - \mathbf{Z}_{rs-s}$ równania (15) i (16)

przedstawić można w postaci:

$$(15a) \quad f_{pr} = \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{Z}_{pr-p} - \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{Z}_{pr-r} = 0,$$

$$(16a) \quad f_{rs} = \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{Z}_{rs-r} - \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{Z}_{rs-s} = 0.$$

Podstawiając do równań (15a) i (16a) zależności (12) uzyska się:

$$(17) \quad \begin{aligned} f_{pr} &= \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-p}^T \mathbf{V}_{pr-p}^* \mathbf{q}_p - \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-r}^T \mathbf{V}_{pr-r}^* \mathbf{q}_r = 0, \\ f_{rs} &= \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{V}_{rs-r}^* \mathbf{q}_r - \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-s}^T \mathbf{V}_{rs-s}^* \mathbf{q}_s = 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_{pr-p} &= \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-p}^T \mathbf{V}_{pr-p}^*, & \mathbf{T}_{pr-r} &= \mathbf{n}_{pr}^T \mathbf{C}_{pr-r}^T \mathbf{V}_{pr-r}^*, \\ \mathbf{T}_{rs-r} &= \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-r}^T \mathbf{V}_{rs-r}^*, & \mathbf{T}_{rs-s} &= \mathbf{n}_{rs}^T \mathbf{C}_{rs-s}^T \mathbf{V}_{rs-s}^*, \end{aligned}$$

równania (17) przyjmują postać

$$(19) \quad \begin{aligned} f_{pr} &= \mathbf{T}_{pr-p} \mathbf{q}_p - \mathbf{T}_{pr-r} \mathbf{q}_r = 0, \\ f_{rs} &= \mathbf{T}_{rs-r} \mathbf{q}_r - \mathbf{T}_{rs-s} \mathbf{q}_s = 0. \end{aligned}$$

Wyrażenia (19) są liniowymi formami współrzędnych uogólnionych. Wyrazy macierzy \mathbf{T}_{pr-p} , \mathbf{T}_{pr-r} , \mathbf{T}_{rs-r} , \mathbf{T}_{rs-s} są pochodnymi równań więzów względem odpowiednich współrzędnych uogólnionych, czyli

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}_{pr-p} &= \left[\frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{p1}}, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{p2}}, \dots, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{p6}} \right], \\ -\mathbf{T}_{pr-r} &= \left[\frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{r1}}, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{r2}}, \dots, \frac{\partial f_{pr}}{\partial q_{r6}} \right], \\ \mathbf{T}_{rs-r} &= \left[\frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{r1}}, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{r2}}, \dots, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{r6}} \right], \\ -\mathbf{T}_{rs-s} &= \left[\frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{s1}}, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{s2}}, \dots, \frac{\partial f_{rs}}{\partial q_{s6}} \right]. \end{aligned}$$

Przy założeniu, że więzy są idealne, równania ruchu modelu napędu składającego się z SES i uwzględniającego więzy geometryczne nałożone na zazębienia można zapisać w postaci

$$(21) \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} + \mathbf{g}\lambda,$$

gdzie \mathbf{M} oznacza diagonalną macierz współczynników bezwładności sztywnych elementów skończonych modelu, \mathbf{L} kwadratową macierz tłumienia, \mathbf{K} kwadratową macierz sztywności, \mathbf{q} kolumnową macierz współrzędnych uogólnionych, λ kolumnową macierz nieoznaczonych mnożników Lagrange'a, zaś \mathbf{g} prostokątną macierz pochodnych równań więzów względem współrzędnych uogólnionych.

Sposób budowania macierzy \mathbf{g} (wzór (22)) przedstawiono dla następujących założeń: jeśli w kolejności SES w modelu para kół o numerach p i r jest pierwszą parą współpracującą, para kół r i s — drugą parą współpracującą (koło r jest kołem pośredniczącym — patrz rys. 2) — zaś para kół o numerach t i w jest k -tą parą współpracującą oraz l oznacza

liczbę współpracujących par kół, a n -liczbę stopni swobody całego modelu, wówczas:

$$(22) \quad \mathbf{g} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & k-1 & k & k+1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ p \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ g = s \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ w \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \vdots & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \\ \mathbf{T}_{pr-p}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \vdots & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \\ -\mathbf{T}_{pr-r}^T & \mathbf{T}_{rs-r}^T & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \vdots & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{rs-s}^T & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \vdots & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{T}_{tw-t}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \vdots & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{tw-w}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \\ \vdots & \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{--- } n \times l$$

Kolumnową macierz nieoznaczonych mnożników Lagrange'a przedstawia wzór

$$(23) \quad \lambda = \text{col}\{\lambda_{pr}, \lambda_{rs}, \dots, \lambda_{tw}, \dots, \lambda_{uz}\},$$

gdzie λ_{pr} jest nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a przyporządkowanym więzom geometrycznym nr 1 (pierwszej parze współpracujących kół, tj. p i r), λ_{tw} — nieoznaczonym mnożnikiem Lagrange'a przyporządkowanym więzom geometrycznym nr k (k -tej parze współpracujących kół, tj. t i w).

Równania (21) można rozwiązać przy użyciu ETO, jednakże konieczne jest wyrugowanie nieoznaczonych mnożników Lagrange'a.

W tym celu wykorzystano metodę podaną w pracy [2]. Różniczkując dwukrotnie względem czasu t równania więzów geometrycznych uzyska się równania warunkowe o postaci

$$(24) \quad \begin{aligned} f_{pr}'' &= \mathbf{T}_{pr-p} \ddot{\mathbf{q}}_p - \mathbf{T}_{pr-r} \ddot{\mathbf{q}}_r = 0, \\ f_{rs}'' &= \mathbf{T}_{rs-r} \ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{T}_{rs-s} \ddot{\mathbf{q}}_s = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{tw}'' &= \mathbf{T}_{tw-t} \ddot{\mathbf{q}}_t - \mathbf{T}_{tw-w} \ddot{\mathbf{q}}_w = 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Równania (24) w notacji macierzowej przyjmują postać

$$(25) \quad \mathbf{g}^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Kolumnowy wektor przyspieszeń wyznaczony z równań (21) wyrażony jest wzorem

$$(26) \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{g}\lambda - \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q}).$$

Podstawiając (26) do (25) i dokonując prostych przekształceń, otrzyma się macierz nieoznaczonych mnożników Lagrange'a:

$$(27) \quad \lambda = (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}).$$

Aby macierz $(\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})$ była odwracalna spełniony musi być warunek jej nieosobliwości. Analizując budowę macierzy \mathbf{g} łatwo stwierdzić, że rząd macierzy $(\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})$ jest równy l co implikuje jej nieosobliwość.

Macierz λ wyrażoną wzorem (27) podstawia się do równań (21)

$$(28) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P} + \mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P}).$$

Oznaczając w równaniu (28):

$$(29) \quad \mathbf{L}_f = -\mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L},$$

$$(30) \quad \mathbf{K}_f = -\mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K},$$

$$(31) \quad \mathbf{P}_f = -\mathbf{g} (\mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P},$$

uzyska się równanie ruchu w postaci

$$(32) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{L} + \mathbf{L}_f) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_f) \mathbf{q} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_f.$$

Podstawiając

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_f; \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_f; \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_f$$

do równania (32) uzyska się

$$(33) \quad \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \hat{\mathbf{P}}.$$

Macierze \mathbf{L} , \mathbf{K} i \mathbf{P} tworzy się zgodnie z zasadami ujętymi w pracy [1].

Równania (33) opisują ruch liniowego modelu wielostopniowej przekładni zębatej i mogą być rozwiązane przy użyciu metod i programów zamieszczonych w pracy [1].

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda modelowania wielostopniowych przekładni zębatych przy użyciu metody sztywnych elementów skończonych może być stosowana w tych przypadkach, gdy w układzie występuje wstępne napięcie o wartości gwarantującej, że w trakcie jego pracy nie będzie zachodzić odkrywanie luzów. W porównaniu z dotychczas stosowanymi w praktyce obliczeniowej matematycznymi modelami drgań skrętnych [5, 6, 7, 9], model zbudowany z SES umożliwia wyznaczenie charakterystyk dynamicznych zarówno drgań skrętnych jak i giętnych poszczególnych wałków napędu. Wprawdzie w metodach przedstawionych w pracach [5, 7] uwzględnia się wpływ ugięć wałków i promieniowych odkształceń, łożysk na charakterystyki drgań skrętnych, lecz tylko statycznie, przez wprowadzenie tzw. skrętnej podatności równoważnej. Model matematyczny drgań giętno-skrętnych powinien zatem dać dokładniejsze wyniki. Dodatkową zaletą modelu wielostopniowej przekładni zębatej zbudowanego z SES jest możliwość wykorzystania programów metody SES [1].

Literatura cytowana w tekście

1. J. KRUSZEWSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Warszawa, 1975.
2. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, Warszawa 1960.
3. W. L. WEJC, A. E. KOCZURA, A. M. MARTYNIENKO, *Obliczanie dynamiki napędów maszyn*, Warszawa 1975.

4. K. OCHEŁDUSZKO, *Kola zębate*, tom. I, *Konstrukcja*, Warszawa 1966.
5. Wilson W. KER, *Precical Solution of Torsional Vibration Problems*, Volume II, London 1963.
6. K. MARCHELEK, *Dynamika obrabiarek*, Warszawa 1974.
7. W. NADOLSKI, *Modelowanie dynamiczne przekładni zębatych jednostopniowych*, Prace IPPT, Warszawa 1972.
8. M. MIELCZAREK, *Możliwości wykorzystania systemowego modelu matematycznego do badania charakterystyk dynamicznych wielostopniowej przekładni zębatej*, Arch. Bud. Masz., 3, 22 (1975).

Р е з ю м е

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ
ПО МЕТОДУ ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изложен метод определения изгибно-крутильных колебаний главных приводов металлорежущих станков. Физическая модель построена из жестких конечных элементов, соединённых с помощью упруго-демпфирующих элементов с линейными характеристиками. Каждый элемент, упругий или демпфирующий, определен шестью коэффициентами упругости и демпфирования. Жёсткие конечные элементы, моделирующие зубчатые передачи, находятся под действием геометрических связей, определяющих условия постоянства зацепления. Разработанная математическая модель и алгоритм её решения представлены в простом виде, пригодном для ЭЦВМ.

S u m m a r y

MODELLING OF MULTIPLE TOOTHED GEARS BY RIGID FINITE ELEMENTS

A method of calculating the flexural and torsional vibrations of the machine tool main drives is presented. The physical model was constructed of rigid finite elements connected with elasticdamping elements of linear characteristics. Each elastic or damping element is defined by six rigidity or damping coefficients. The rigid finite elements modelling the gear are subjected to geometrical constraints resulting from the conditions of constant gearing. Both the mathematical model and the corresponding solution algorithm are presented in the form suitable for computations.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1977 r. ponownie dnia 10 marca 1978 r
