MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 15 (1977)

ZASTOSOWANIE FORMUŁY LIEBMANNA DO OPRACOWYWANIA WYNIKÓW BADAŃ ELASTOOPTYCZNYCH

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

1. Wstęp

Podstawowym problemem pojawiającym się przy stosowaniu metod elastooptycznych opartych na pomiarze względnej dwójłomności wymuszonej do wyznaczania pól naprężeń jest problem tzw. rozdzielania naprężeń, tj. wyznaczenia wartości naprężeń normalnych na podstawie obrazów izochrom i izoklin. Metody elastooptyczne pozwalają w ogólnym wypadku trójwymiarowego stanu naprężenia wyznaczyć tylko naprężenie styczne i różnice naprężeń normalnych [1]. Dodatkową informację np. o wartości jednego z naprężeń normalnych lub o wartości ich sumy, konieczną do rozdzielenia naprężeń, uzyskujemy korzystając z metod nieelastooptycznych, np. całkując jedno z różniczkowych równań równowagi lub jedno z różniczkowych równań zgodności odkształceń. W szczególności, z tych ostatnich, jak wiadomo, wynika, iż w zagadnieniu statycznym suma naprężeń normalnych spełnia różniczkowe równanie Laplace'a, np. [2, 3].

Jedynie na powierzchni modelu lub w zagadnieniu dwuwymiarowym, a więc gdy znana jest jedna z trzech składowych normalnych tensora naprężenia, możemy rozdzielić naprężenia korzystając tylko z obrazów izochrom i izoklin. Należy jednak dodać, że również i wtedy, jeśli z jakichś powodów wywołanych np. warunkami doświadczenia można uzyskać obrazy izochrom i izoklin tylko przy jednym kierunku prześwietlania modelu (jest nim na ogół w zagadnieniach dwuwymiarowych kierunek prostopadły do powierzchni modelu), to do wyznaczania składowych normalnych tensora naprężenia musimy skorzystać z metod nieelastooptycznych. Metody te są tym bardziej trudne i kłopotliwe, gdy dysponujemy samym tylko obrazem izochrom.

W pracy niniejszej chcemy zwrócić uwagę na ułatwienia, jakie można uzyskać stosując w zagadnieniach dwu- i trójwymiarowych formułę Liebmanna lub jej uogólnienia.

2. Formuły typu Liebmanna

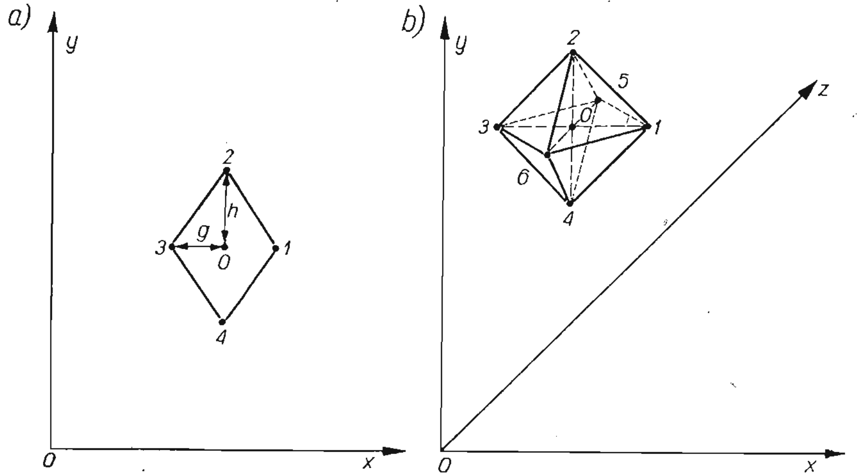
Jak wiadomo, jeśli w pewnym dwuwymiarowym obszarze określona jest funkcja harmoniczna $S(x, y)$, tzn. funkcja spełniająca równanie Laplace'a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)S(x, y) = 0 \tag{1}$$

i jeśli wartości tej funkcji w wierzchołkach rombu 1, 2, 3, 4, o przekątnych równoległych do osi Ox, Oy (rys. 1a), wynoszą odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4, zaś wartość funkcji w punkcie przecięcia się przekątnych wynosi S_0, to ma miejsce następujący związek, [4, 5]:

$$S_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(g/h)^2}(S_1+S_3)+\frac{1}{1+(h/g)^2}(S_2+S_4)\right], \tag{2}$$

przy czym g/h oznacza stosunek długości przekątnej równoległej do osi x do długości przekątnej równoległej do osi y. Związek ten jest słuszny z dokładnością do wyrazów zawierających pochodne cząstkowe funkcji S czwartego i wyższego rzędu.



Rys. 1. Różnicowe siatki punktów do formuł Liebmanna

Jeśli $g = h$, tzn. jeśli romb jest kwadratem, to

$$S_0 = \frac{1}{4}(S_1+S_2+S_3+S_4), \tag{3}$$

skąd

$$S_4 = 4S_0 - S_1 - S_2 - S_3. \tag{4}$$

Z kolei, jeśli funkcja harmoniczna określana jest w przestrzeni trójwymiarowej, a więc jeśli zachodzi równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)S(x, y) = 0, \tag{5}$$

i jeśli jej wartości w wierzchołkach ośmiościanu o jednakowych przekątnych wynoszą S_i, $i = 1, \ldots, 6$, wartość zaś w środku wynosi S_0 (patrz rys. 1b), to ma miejsce proste uogólnienie formuły (3)

$$S_0 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} S_i. \tag{6}$$

Również i ono jest słuszne z dokładnością do wyrazów zawierających pochodne cząstkowe S rzędu czwartego i wyższego.

Szczególnym przypadkiem zagadnień trójwymiarowych jest zagadnienie osiowo symetryczne. Wtedy funkcje zależą tylko od zmiennej z skierowanej wzdłuż osi symetrii i od zmiennej r prostopadłej do tej osi, a równanie Laplace'a jest następujące [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)S(z,r)=0. \tag{7}$$

Różnicowym odpowiednikiem tego równania jest związek

$$S_0=\frac{1}{4}(S_1+S_2+S_3+S_4), \tag{8}$$

jeśli punkt O leży na Oz, lub

$$S_0=\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{h}{2r}\right)S_1+\left(1-\frac{h}{2r}\right)S_3+S_2+S_4\right], \tag{9}$$

jeśli punkt O nie leży na osi Oz (porównaj Dodatek I). S_1, S_2, S_3, S_4, są to wartości funkcji S w narożach kwadratu 1, 2, 3, 4, którego przekątne skierowane są równolegle do osi Oz i Or (rys. 1a, przy czym oś Oz odpowiada osi Oy, zaś Or osi Ox z tego rysunku). Formuła (9) w odróżnieniu od formuł poprzednich słuszna jest jednak tylko z dokładnością do wyrazów zawierających pochodne cząstkowe trzeciego i wyższych rzędów w kierunku Or i pochodne czwartego i wyższych rzędów w kierunku Oz.

Formułę (3) po raz pierwszy podał w swoim wykładzie BOLTZMANN w r. 1892, [5, 6]. Niezależnie wyprowadził ją RUNGE, [7]. Formuła ogólniejsza (2) i formuła dla zagadnień trójwymiarowych (6) należy do LIEBMANNA [5]. Dowód zbieżności tych formuł do rozwiązania równania różniczkowego przy malejącym kroku różnicowym podany jest w [8], patrz też [9, 10, 11].

3. Zastosowanie formuł typu Liebmanna

3.1. Zagadnienia dwuwymiarowe. Jeśli możemy uzyskać tylko obraz izochrom w prostopadłej do modelu elastooptycznego wiązce światła spolaryzowanego, to rozdzielić naprężenia można[1]:

1) metodą doświadczalną zaproponowaną przez TESAŘA [12], polegającą na wywierceniu otworków w interesujących punktach modelu i wyznaczeniu stanu naprężenia na podstawie obrazu izochrom wokół tego otworku,

2) metodami obliczeniowymi: metodą rozwiązania równania Laplace'a lub metodą charakterystyk [13, 14].

Metoda doświadczalna powoduje lokalną zmianę własności sprężystych modelu wokół otworka i dlatego nie może być stosowana do zbyt dużej ilości punktów. Z kolei metody

[1] Pomijamy tu, zgodnie z ograniczeniem uczynionym we wstępie, metody oparte na bezwzględnym pomiarze dwójłomności, a więc w szczególności metody polegające na otrzymywaniu izopach metodami interferencji klasycznej i holograficznej. Pomijamy też metody pomiaru zmian grubości modelu tarczowego lub pomiaru efektów termicznych w celu wyznaczenia sumy naprężeń głównych, jako nieelastooptyczne i mało dokładne. Oczywiste jest jednak, że proponowana w tekście metoda nadaje się również do opracowywania wyników takich pomiarów.

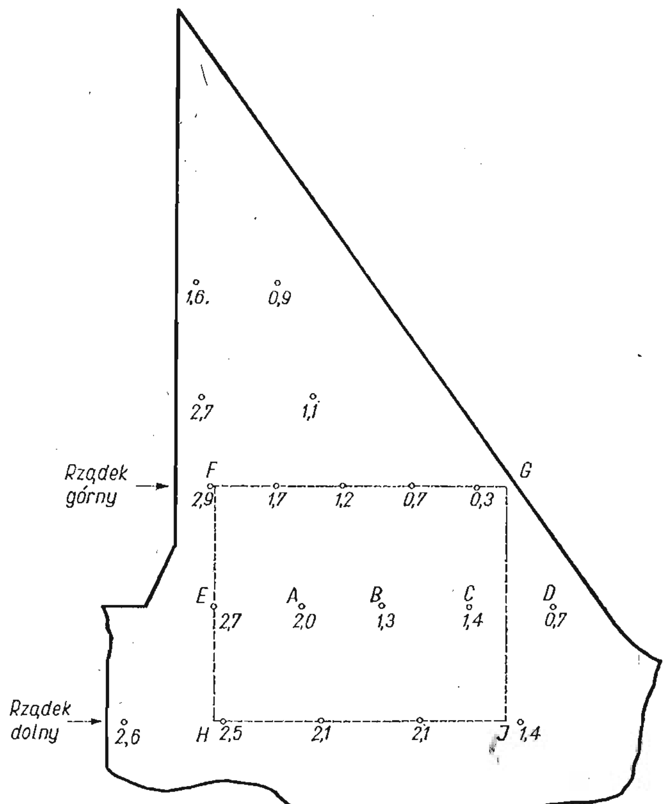
numeryczne są dość kłopotliwe w zastosowaniu: pracochłonne przy obliczeniach ręcznych, dość trudne w zaprogramowaniu maszyny cyfrowej dla dowolnego kształtu modelu. W szczególności metoda charakterystyk wymaga podania dość gęstej, a więc uciążliwej w sporządzeniu, tablicy wartości izochrom $m(x, y)$ w całym obszarze badanego ośrodka.

W związku z tym nasuwają się dwie możliwości wykorzystania formuły Liebmanna:

a) zastosowanie formuły Liebmanna w połączeniu z metodą Tesařa pozwala zmniejszyć ilość wierconych w modelu otworów;

b) wynikający z formuły Liebmanna związek (4) pozwala badać harmoniczność rozwiązania uzyskiwanego metodą charakterystyk i ewentualnie wygładzić rozwiązanie lub je ekstrapolować.

P r z y k ł a d 1. Na rys. 2 podano wartości sumy S naprężeń normalnych w modelu zapory w jednostkach stałej modelowej K, na podstawie wyników pracy [15], w której zastosowano do rozdzielenia naprężeń metodę wiercenia otworków w poszczególnych interesujących punktach. Zajmiemy się stanem naprężenia wzdłuż linii ED będącej geometryczną granicą zapory. Pokażemy, że można było uniknąć wiercenia otworków A lub B stosując



Rys. 2. Sumy naprężeń głównych w poszczególnych punktach modelu zapory grawitacyjnej obciążonej ciężarem własnym, wyznaczone metodą wiercenia otworów, wg. [15]. Wartości naprężeń podano w jednostkach stałej modelowej K. Linią przerywaną oznaczono prostokąt, w którym szukamy sumy naprężeń metodą iteracji

tylko jeden raz formułę Liebmanna oraz obu tych otworków stosując tę formułę w sposób iteracyjny.

Dokonajmy interpolacji graficznej wartości sumy naprężeń S znalezionych metodą TESAŘA w rządku FG i HJ, a to celem uzyskania wartości sumy S w wierzchołkach „2" i „4" (rys. 1a) rombów, których środki przypadają w punktach A lub B.

Znajdujemy, stosując formułę (2), w której przyjmujemy $g/h = 2/3$, że w jednostkach stałej modelowej:

(10)
$$S_A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1,444}(2,7+1,3)+\frac{1}{3,25}(1,46+2,2)\right] = 1,95,$$
$$S_B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1,444}(2,0+1,4)+\frac{1}{3,25}(0,9+2,05)\right] = 1,63.$$

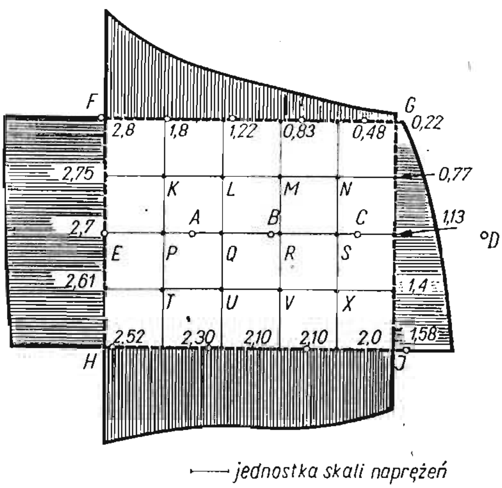
Wskaźniki A, B oznaczają, że wartość S odnosi się do tych punktów. Porównując je z bezpośrednio zmierzonymi metodą TESAŘA, widzimy, że odpowiednie różnice wynoszą 0,05 i 0,33. Mieszczą się one w granicach błędu doświadczalnego. Mianowicie, w metodzie TESAŘA sumę naprężeń głównych wyznacza się na podstawie maksymalnych wartości naprężeń na brzegu otworka: m_{I} i m_{II}, za pomocą wzoru, por. [12],

(12)
$$S = \sigma'+\sigma'' = \frac{1}{2}(m_{\text{I}}+m_{\text{II}}).$$

Zgodnie z [15, 23] dokładność pomiaru każdej z wartości m_{I} i m_{II} wynosiła 0,5 rzędu izochromy, zatem średni błąd kwadratowy sumy S wynosił

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\times 0,5 \cong 0,35,$$

co usprawiedliwia wartość różnic między wielkościami zmierzonymi a obliczonymi.



Rys.3. Sieć różnicowa do znalezienia sumy naprężeń metodą iteracji w prostokącie $FGHJ$ z rys. 2. Krzywe nad polami zakreskowanymi przedstawiają w jednostkach stałej modelowej przebieg sumy naprężeń wzdłuż boków prostokąta. Podane liczby oznaczają wartości sumy naprężeń w brzegowych węzłach sieci (wykorzystane do dalszych obliczeń). Szukamy wartości naprężeń w punktach $K, L, \ldots, V, X$. Kółkami oznaczono położenia otworków (por. rys. 2)

Aby się przekonać, które z powyższych wartości S_A i S_B, zmierzone czy obliczone, zgadzają się bardziej z wartościami zmierzonymi w pozostałych punktach, zastosujemy metodę iteracyjną. Pozwoli nam ona uzyskać dokładniejsze wartości sumy naprężeń oraz pozwoli wykazać, że można było uniknąć wiercenia obu otworków A i B. Wydzielmy z rozważanego ośrodka obszar prostokąta $FGHJ$ (rys. 2). Bok GJ zamyka prostokąt w ten sposób, by mieściła się w nim całkowita liczba elementarnych kwadratów siatki różnicowej, co znacznie ułatwia obliczenia. Wartości sumy naprężeń na bokach prostokąta znajdujemy na drodze interpolacji graficznej z danych doświadczalnych otrzymanych metodą TESAŘA. W szczególności wartość „1,13" pośrodku boku GJ znajdujemy z interpolacji wzdłuż odcinka $ABCD$. Następnie biorąc dla każdego węzła sieci średnią z wartości otrzymanych na drodze interpolacji liniowej w kierunku poziomym i pionowym, znajdujemy przybliżenie zerowe rozwiązania na sumę naprężeń S wewnątrz prostokąta (rys. 3). Wartości kolejnych iteracji zamieszczone są w tablicy 1. Widzimy, że wartości otrzymane już w pierwszej iteracji ulegają w dalszych iteracjach niewielkim zmianom.

Tablica 1. Kolejne iteracje dla prostokątnego podobszaru zapory

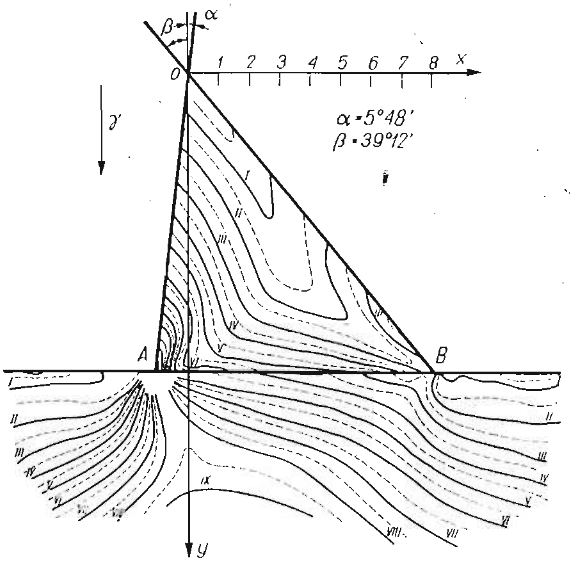
Punkt		K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	X
interpolacja liniowa	pozioma	2,35	1,96	1,48	1,15	2,38	2,06	1,77	1,46	2,40	2,14	1,90	1,64
	pionowa	1,92	1,43	1,16	0,61	2,04	1,66	1,49	0,74	2,18	1,88	1,80	0,89
przybliżenie zerowe		2,14	1,70	1,32	0,88	2,21	1,86	1,63	1,10	2,29	2,01	1,85	1,26
iteracja I		2,12	1,64	1,26	0,92	2,24	1,88	1,50	1,28	2,28	2,02	1,75	1,59
iteracja II		2,11	1,62	1,15	0,95	2,24	1,85	1,54	1,28	2,29	2,00	1,80	1,61
iteracja III		2,10	1,58	1,24	0,92	2,24	1,85	1,52	1,31	2,29	2,01	1,81	1,62
iteracja IV		2,09	1,60	1,21	0,95	2,24	1,84	1,55	1,30	2,29	2,01	1,81	1,63
iteracja V		2,10	1,59	1,23	0,94	2,23	1,85	1,54	1,32	2,29	2,01	1,82	1,63

Jeśli korzystając z wyników tablicy 1 i rozmieszczenia punktów A i B względem odpowiednich par punktów (P, Q) i (Q, R) znajdziemy na drodze interpolacji liniowej wartości S_A i S_B, jako

$$
\begin{aligned}
S_A &\cong \frac{1}{2}(S_P+S_Q) = 2{,}04, \\
S_B &\cong S_R+\frac{1}{8}(S_Q-S_R) = 1{,}58,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

to zobaczymy, zwłaszcza na przykładzie S_B, że wartości znalezione metodą obliczeniową, dane związkami (10), są w lepszej zgodności z wynikami (12) uzyskanymi na drodze iteracyjnej niż wyniki uzyskane z bezpośredniego pomiaru doświadczalnego, podane na rys. 2. Świadczy to o zaletach metody obliczeniowej.

P r z y k ł a d 2. Korzystając z obrazu izochrom mamy znaleźć sumę naprężeń $S(x, y = 10)$ wzdłuż podstawy AB trójkąta obciążonego ciężarem własnym γ i posadowionego na półpłaszczyźnie o 2,4 razy niższym module Younga i takiej samej stałej Poissona ($\nu = 0{,}5$). Proporcje trójkąta, kierunek działania siły γ i obraz izochrom pokazany jest na rys. 4.

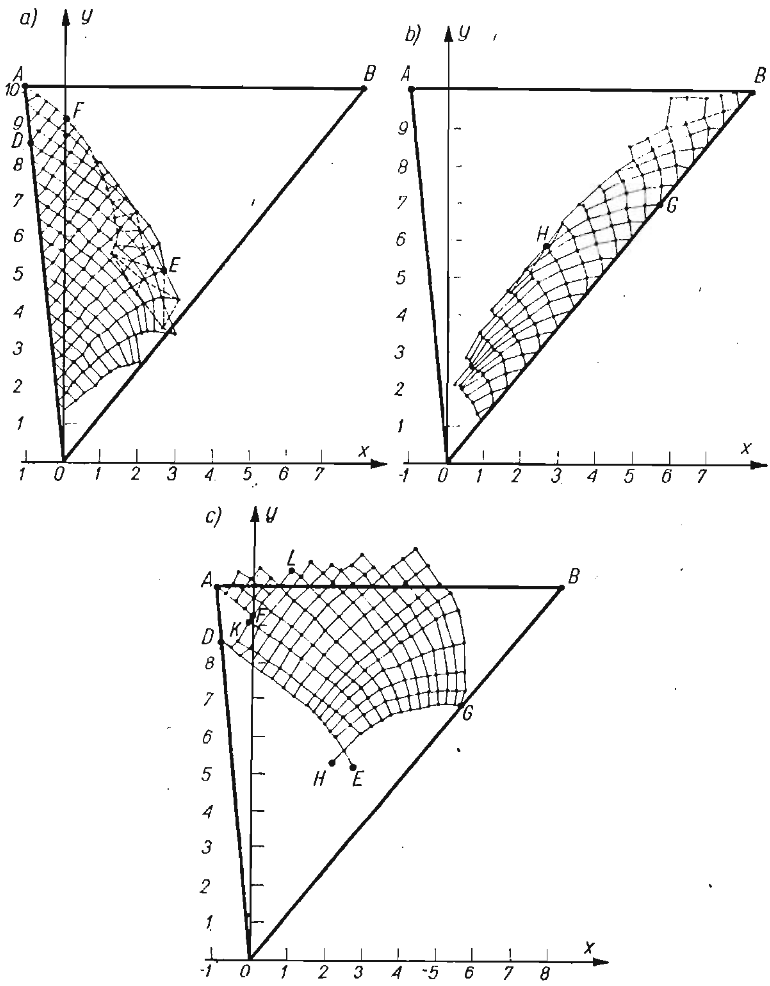


Rys. 4. Obraz izochrom w tarczy niejednorodnej omawianej w przykladzie 2. Liczby rzymskie numerują całkowite rzędy izochrom

Do rozdzielenia naprężeń wykorzystaliśmy metodę charakterystyk. Spodziewaliśmy się, dzięki ekstrapolacyjnym właściwościom formuł różnicowych tej metody, wyznaczyć stan naprężenia wzdłuż linii niejednorodności AB, obchodząc w ten sposób trudność modelowania płaskiego stanu naprężenia wzdłuż linii niejednorodności, występującą przy stosowaniu niejednorodnej tarczy [16][2)].

Do części linii niejednorodności AB mogliśmy się zbliżyć budując sieć charakterystyk od strony boku OB, tzn. rozwiązując problem brzegowy rys. (5b). Aby zbliżyć się do pozostałej części linii AB rozwiązaliśmy najpierw problem brzegowy budując sieć charakterystyk od strony boku OA (rys. 5a). Następnie rozwiązywaliśmy problem charakterystyczny, tzn. budowaliśmy sieć charakterystyk wychodząc ze znanych już charakterystyk należących do dwu rodzin. Problem charakterystyczny rozwiązywaliśmy dwukrotnie, raz wychodząc z charakterystyk DE i GH, i drugi raz wychodząc z charakterystyk AF i KL (rys. 5c). Okazało się jednak, że między rozwiązaniem $S(x, y = 10)$, tzn. na linii AB, otrzymanym

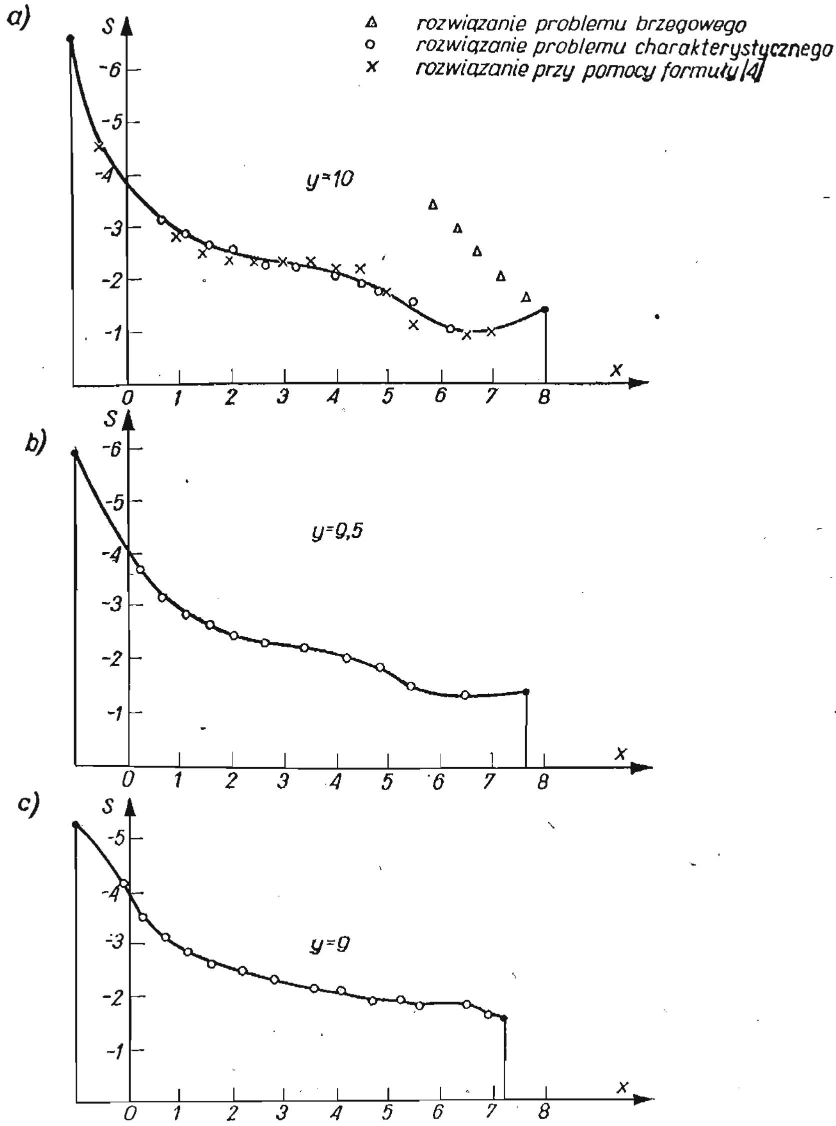
[2)] Zasadnicza trudność w zastosowaniu tarczy, a więc bryły trójwymiarowej, do modelowania niejednorodnego ośrodka w dwuwymiarowym stanie naprężenia polega na tym, że wzdłuż granicy zmian własności ośrodka musi być spełniony warunek ciągłości sił i przemieszczeń opisywanych przez trójwymiarowe wektory. W związku z tym, w ogólności, wzdłuż wspomnianej granicy panuje nie dwuwymiarowy a trójwymiarowy stan naprężenia.



Rys. 5. Charakterystyki otrzymane przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego, rys. rys. a), b) oraz charakterystycznego, rys. c) (por. przykład 2)

z rozwiązania problemu brzegowego a otrzymanym z problemu charakterystycznego zachodziła nieuzasadniona nieciągłość (rys. 6a).

Celem znalezienia poprawnego rozwiązania sporządziliśmy, korzystając z rozwiązania problemu charakterystycznego i brzegowego, wykresy zależności $S(x, y = 9,5)$ i $S(x, y = 9)$, które okazały się ciągłe (rys. 6b, c), a następnie umieszczając na prostej $y = 9,5$ punkty 0, 1, 3, na prostej $y = 9$ punkt 2, a na prostej $y = 10$ punkt 4, znaleźliśmy stosując formułę (4) szukany przebieg $S(x, y = 10)$ (rys. 6a). Przebieg ten jest ciągły i zgodny z rozwiązaniem problemu charakterystycznego. Wnioskujemy stąd, że nieciągłość rozwiązań $S(x, y = 10)$ otrzymanych z problemu charakterystycznego i brzegowego była wynikiem błędu w interpretacji obrazu izochrom jako różnicy naprężeń głównych, błędu wywołanego prawdopodobnie trójwymiarowym stanem naprężenia panującym w pobliżu



Rys. 6. Przebieg sumy naprężeń głównych (w jednostkach 2 K) wzdłuż trzech przekrojów trójkąta z rys. 4. Linia ciągła oznacza przebiegi przyjęte

AB. W zagadnieniu charakterystycznym, w którym brano wartość izochrom w punktach bardziej oddalonych od odcinka AB niż w zagadnieniu brzegowym, błąd ten był mniejszy.

Należy zauważyć, że średni błąd kwadratowy ΔS_2 wyników otrzymanych za pomocą formuły (4) wynosi (por. [17])

(13) $$\Delta S_2 = \sqrt{4^2+1^2+1^2+1^2}\,\Delta S_0 \cong 4{,}4 \cdot \Delta S_0,$$

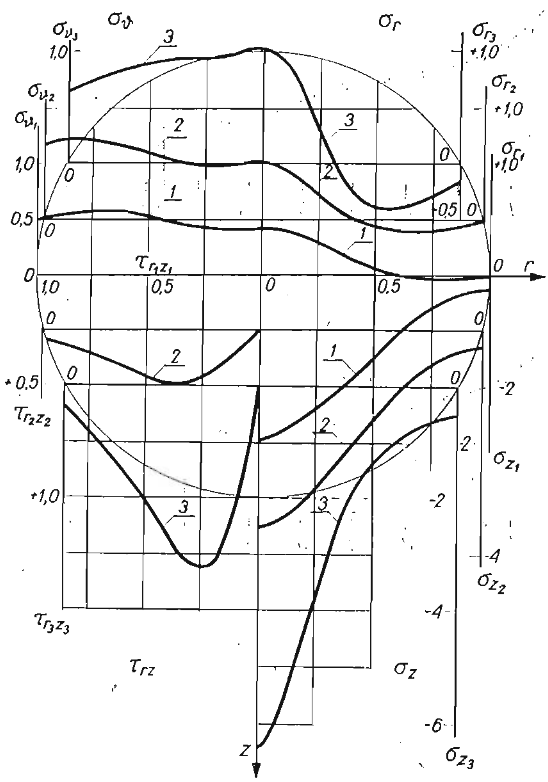
przy czym założyliśmy, że błędy wartości wyjściowych

$$\Delta S_0 = \Delta S_1 = \Delta S_3 = \Delta S_4$$

są sobie równe. Ze względu na czynnik ≈ 4 we wzorze (13) prowadzenie obliczeń przy pomocy formuły (4) wymaga dokładnych danych wyjściowych.

3.2. Osiowosymetryczne zagadnienie trójwymiarowe. Formuły (8) i (9) można wykorzystać do rozdzielenia naprężeń w zadaniach osiowo-symetrycznych metodą numerycznego rozwiązywania równania Laplace'a (7) na podstawie dostarczonych przez pomiar elastooptyczny warunków brzegowych, podobnie jak analogiczne formuły w zagadnieniach płaskiego stanu naprężenia (por. Dodatek I). Ponadto możemy je wykorzystywać do interpolacji i ekstrapolacji wyników otrzymywanych metodami punktowymi, takimi jak metody elastooptycznej warstwy perforowanej [15, 18] lub metody tensometryczne [19].

Stosowalność formuł (8) i (9) sprawdziliśmy opierając się na doświadczalnym rozwiązaniu dla kuli ściskanej wzdłuż średnicy siłami skupionymi, podanym w pracy [20] (rys. 7), gdzie znaleziono składowe tensora naprężeń w trzech przekrojach: $z = 0$, $z = 1/4$, $z = 1/2$, przy czym kierunek osi z, będącej osią walcowego układu współrzędnych pokrywał się z kierunkiem działania zewnętrznych sił ściskających, promień kuli wynosił 1.



Rys. 7. Składowe naprężenia w kuli sprężystej ściskanej osiowo siłą P. Wartości naprężeń podane są w jednostkach naprężenia nominalnego $\sigma_n = P/\pi r^2$ i oznaczone są przez σ_r, σ_z, σ_ϑ, τ_{rz}. Promień kuli R przyjęto równy 1, wg. Filimonowej [20]

Znając składowe σ_r, σ_ϑ, σ_z obliczamy przez zwykłe dodanie wartości sumy

$$S_i = (\sigma_r+\sigma_\vartheta+\sigma_z), \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

w punktach 1, 2, 3, 4, a następnie znajdujemy wartość S_0 według formuł (8) albo (9).

W tablicy 2 porównano wyniki otrzymane za pomocą formuł (8) i (9), (kolumna VI) z bezpośrednimi wynikami eksperymentalnymi (kolumna IV), wziętymi z wymienionej pracy. Na ogół, w granicach błędu doświadczalnego, zachodzi zgodność obu wielkości.

Jeśli więc znamy wartość sumy naprężeń normalnych w punktach 1, 2, 3, 4, to stosując formułę (8) albo (9) możemy ją wyznaczyć w punkcie O z wystarczającą dokładnością i w ten sposób interpolować wyniki punktowych metod pomiaru składowych tensora naprężenia. Formuły te możemy stosować również do ekstrapolacji wyników.

P r z y k ł a d 3. Stosując metodę elastooptycznej warstwy perforowanej znajdujemy bezpośrednio naprężenia główne σ', σ'', a więc również ich sumę

$$\sigma'+\sigma'' = \sigma_r+\sigma_z.$$

Wartość $\sigma''' = \sigma_\vartheta$ jest znana tylko wzdłuż osi symetrii $r = 0$, gdzie

$$\sigma_\vartheta = \sigma_r,$$

a więc:

$$S(r = 0, z) = 2\sigma_r+\sigma_z. \tag{14}$$

Jeżeli punkty 2, 0, 4, ułożymy na osi $r = 0$, to ponieważ $S_1 = S_3$, ze wzoru (8) wynika, że

$$S_1 = 2S_0-\frac{1}{2}(S_2+S_4). \tag{15}$$

Dla (tablica 2) $S_0 = S(r = 0, z = 0) = -2{,}15$, $S_2 = S_4 = S\left(r = 0, z = \frac{1}{4}\right) = -2{,}6$, otrzymamy

$$S_1 = S_3 = S\left(r = \frac{1}{4}, z = 0\right) = -1{,}7,$$

bezpośrednio zaś z pomiaru mamy również:

$$S_{\exp}\left(r = \frac{1}{4}, z = 0\right) = -1{,}7.$$

3.3. Uściślenie doświadczalnych wartości funkcji harmonicznej. Jeśli wiemy, że funkcja, której pole wartości mierzymy doświadczalnie, jest funkcją harmoniczną, to możemy zastosować formułę Liebmanna do uściślenia tych wartości. Postępowanie jest takie, jak przy numerycznym rozwiązywaniu równania Laplace'a (por. [13]) z tym, że wartości znalezione doświadczalnie uważamy za przybliżenie zerowe w iteracyjnym ciągu przybliżeń rozwiązania. Sposobem tym można poprawić i uzupełnić znalezione doświadczalnie wartości sumy naprężeń głównych. Szczególnie korzystne jest jego zastosowanie przy wyznaczaniu naprężeń metodą kombinowania pomiaru elastooptycznego z pomiarem odkształceń siatki naniesionej na badany obiekt (por. [21, 22]). W metodzie tej z pomiaru elastooptycznego

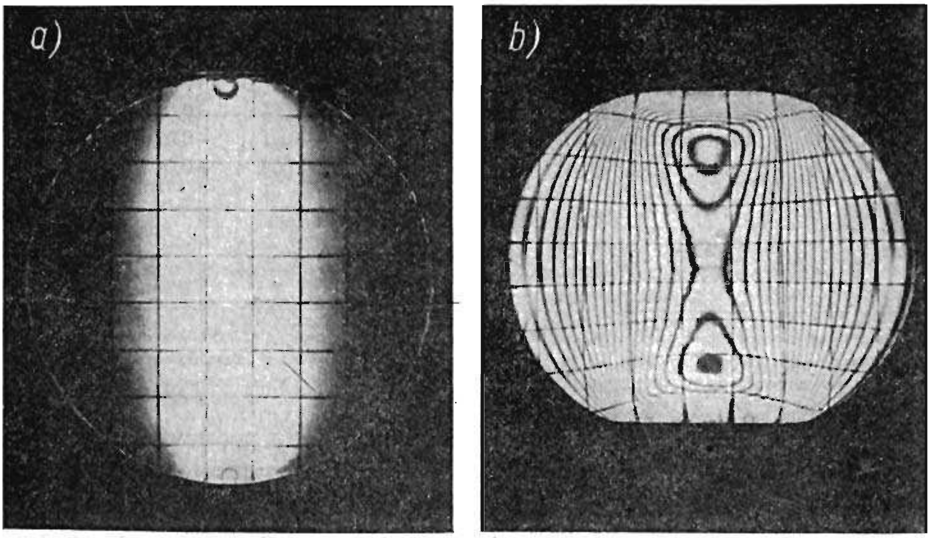
Tablica 2. Porównanie wyników eksperymentalnych, [20], rys. 7, z wynikami otrzymanymi metodą interpolacji (wzory (8), (9)) dla kuli ściskanej osiowo

I nr punktu	II Współrzędne punktu		III			IV $S_{exp} = \sigma_z+\sigma_r+\sigma_\vartheta$	V błąd danych eksperymentalnych	VI $S_{interpol.}$	VII $\Delta = S_{exp} - S_{interpol.}$	VIII $\frac{\Delta}{S_{exp}}$ %
	r	z	σ_z	σ_r	σ_ϑ					
1	0,0	0	−2,95	0,4	0,4	−2,15		−2,15	0	0
2	0,25	0	−2,4	0,3	0,4	−1,7		−1,66	0,04	2
3	0,5	0	−1,45	0,05	0,55	−0,85		−0,86	0,01	1
4	0,75	0	−0,6	−0,05	0,6	−0,05				
5	0	0,25	−3,6	0,5	0,5	−2,6	7%	−2,71	0,11	4
6	0,25	0,25	−2,9	0,25	0,5	−2,15		−1,82	0,33	15
7	0,5	0,25	−1,6	−0,1	0,65	−1,05		−0,88	0,17	16
8	0,75	0,25	−0,65	−0,1	0,7	−0,05				
9	0	0,5	−6,4	1,0	1,0	−4,4				
10	0,25	0,5	−3,95	0,3	0,9	−2,75	12%			
11	0,5	0,5	−1,4	−0,4	0,8	−1,0				

wyznaczamy różnicę naprężeń głównych i ich kierunki, a z pomiaru odkształceń siatki sumę naprężeń głównych. Pomiar siatkowy jest jednak przynajmniej o rząd wielkości mniej dokładny niż pomiar elastooptyczny i dlatego dla sensownego połączenia wyników obu pomiarów celem rozdzielenia naprężeń konieczne jest poprawienie wyników pomiaru odkształceń siatki (porównaj Dodatek II).

P r z y k ł a d 4. Tarcza kołowa o średnicy 4,4 cm i grubości 1 cm, wykonana z żywicy poliuretanowej PU-2 o module Younga $E = 33$ kG/cm^2, liczbie Poissona $\nu = 0,5$ i elastooptycznej stałej materiałowej $K = 0,30$ kG/cm^2 ściskana jest wzdłuż średnicy siłą $P = 8,3$ kG. Na tarczę naniesiono za pomocą stempla i farby drukarskiej kwadratową siatkę. Bok elementarnego kwadratu siatki ma długość 0,5 cm. Wyznaczymy pole sumy naprężeń $S(x, y)$ w obszarze tarczy łącząc wyniki pomiaru elastooptycznego, pomiaru odkształceń siatki i obliczeń iteracyjnych.

Siatkę przed i po odkształceniu przedstawiono na rys. 8. Wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych, którego początek znajduje się w środku tarczy kołowej. Każdy kwadrat numerujemy parą liczb $(y/a, x/a)$, gdzie (x, y) są to współrzędne środka danego



Rys. 8. Kołowa tarcza elastooptyczna z naniesioną siatką: przed i po odkształceniu, patrz przykład 4. Rozjaśnienie w części środkowej rys. a) wywołane jest przez niewielkie obciążenie wstępne

kwadratu. Tablica 3 przedstawia wyniki pomiarów odkształceń i wyznaczone na ich podstawie średnie wartości sumy naprężeń dla poszczególnych kwadratów siatki. Wartości S dla kwadratów (4, 0), (4, 1) bierzemy z teoretycznego rozwiązania zagadnienia półpłaszczyzny obciążonej prostopadle na brzegu siłą skupioną, wartości dla kwadratów (0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 2) z elastooptycznego pomiaru naprężeń brzegowych. Budujemy teraz układ równań Liebmanna dla wartości funkcji S w węzłach kwadratowej sieci różnicowej znajdujących się pośrodku kwadratów siatki. Węzłom tym przypisujemy numery odpowiednich kwadratów. Na rys. 9 widoczne są wyniki kolejnych iteracji tego układu. Dla przyśpieszenia zbieżności w węzłach, w których występowały silne oscylacje

Tablica 3

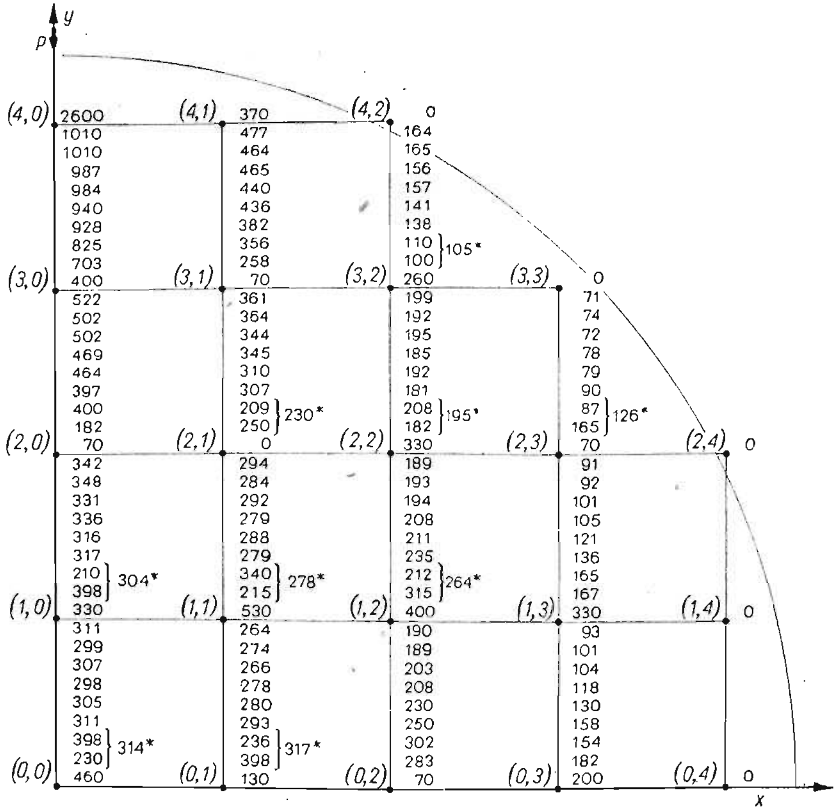
Kwadrat	*) $\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta x' = x'_2 - x'_1$	$\varepsilon_x = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x}$	$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta y' = y'_1 - y'_2$	$\varepsilon_x = \frac{\Delta y' - \Delta y}{\Delta y}$	$\varepsilon_x + \varepsilon_y$	$S = \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 66(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ kG/cm²
0,0	9,8	10,8	0,10	9,8	8,1	−0,17	−0,07	− 4,6
0,1	10,0	11,0	0,10	9,8	8,6	−0,12	−0,02	− 1,3
0,2	9,9	10,6	0,07	9,8	9,0	−0,08	−0,01	− 0,7
0,3	9,8	10,0	0,02	9,8	9,3	−0,05	−0,03	− 2,0
0,4								0
1,0	9,6	10,9	0,13	10,0	8,2	−0,18	−0,05	− 3,3
1,1	10,0	10,8	0,08	10,0	8,4	−0,16	−0,08	− 5,3
1,2	10,0	10,5	0,05	10,0	8,9	−0,11	−0,06	− 4,0
1,3	9,8	10,0	0,02	10,0	9,3	−0,07	−0,05	− 3,3
1,4								0
2,0	9,8	10,8	0,10	9,8	8,7	−0,11	−0,01	− 0,7
2,1	10,0	11,0	0,10	9,8	8,8	−0,10	0	0
2,2	10,0	10,2	0,02	9,9	9,2	−0,07	−0,05	− 3,3
2,3	9,8	10,0	0,02	10,0	9,9	−0,01	0,01	− 0,7
2,4								0
3,0	9,8	10,6	0,08	10,3	8,9	−0,14	−0,06	− 4,0
3,1	10,0	11,0	0,10	10,3	9,2	−0,11	−0,01	− 0,7
3,2	10,0	10,0	0	10,3	9,9	−0,04	−0,04	− 2,6
3,3								0
4,0								−26,0
4,1								− 3,7
4,2								0

* Rzeczywisty element siatki tensometrycznej, ze względu na wady jej wykonania, jest tylko w przybliżeniu kwadratem o boku a. Długości jego boków w ogólności nie są sobie równe i wynoszą Δx, Δy przed odkształceniem oraz $\Delta x'$, $\Delta y'$ po odkształceniu. Pomiary prowadzono przy dwukrotnym powiększeniu. Długości podane są w milimetrach.

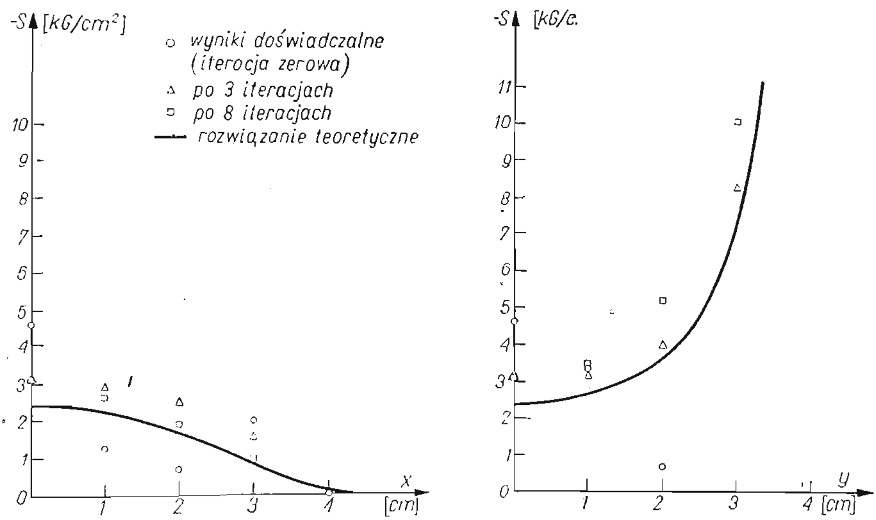
wartości kolejnych iteracji, dokonaliśmy ich uśrednienia. Na podstawie danych z rys. 9 sporządziliśmy na rys. 10 wykres funkcji S wzdłuż średnicy prostopadłej do kierunku działania siły ściskającej (oś x) i średnicy pokrywającej się z tym kierunkiem. Obserwujemy, że już po trzech iteracjach zachodzi znaczna poprawa wyników doświadczalnych i zbliżenie ich do ścisłego rozwiązania teoretycznego. Dokładność wyników iteracji niższa jest wzdłuż osi y, co wynika z bardziej stromego przebiegu funkcji S wzdłuż tej osi.

4. Zakończenie

Pokazaliśmy powyżej, że zastosowanie formuł typu Liebmanna ułatwia opracowanie wyników badań elastooptycznych zagadnień płaskich i osiowo symetrycznych, jak również pozwala uściślić wyniki doświadczalne. W związku z tym chcielibyśmy zwrócić jeszcze uwagę na to, że wartości otrzymane metodą Liebmanna obciążone są mniejszym błędem przypadkowym niż wyjściowe wartości brzegowe, co wynika stąd, że w metodzie tej bierze się pewnego rodzaju średnią wartości brzegowych. Dla skonkretyzowania rozważmy



Rys. 9. Wyniki kolejnych iteracji w węzłach sieci różnicowej. Wskaźnik iteracji wzrasta począwszy od dołu każdej kolumny wyników. Gwiazdkami oznaczono wynik uśrednienia stosowany do dalszych iteracji. Wartości naprężeń w kG/cm² pomnożono przez czynnik (—100)



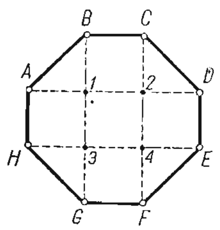
Rys. 10. Wyniki wybranych iteracji wzdłuż promienia prostopadłego do kierunku działania siły (oś x) i zgodnego z tym kierunkiem (oś y), porównane z rozwiązaniem teoretycznym

obszar dwuwymiarowy $AB \dots GH$ pokazany na rys. 11. Przypuśćmy, że na podstawie znanych wartości brzegowych $S_A, S_B, \dots, S_G, S_H$ chcemy znaleźć za pomocą formuły Liebmanna (3) wartości funkcji S w punktach wewnętrznych 1, 2, 3, 4. Mamy następujący układ równań

$$
\begin{aligned}
4S_1 &= S_2+S_3+S_A+S_B,\\
4S_2 &= S_1+S_4+S_C+S_D,\\
4S_3 &= S_1+S_4+S_G+S_H,\\
4S_4 &= S_2+S_3+S_E+S_F,
\end{aligned}
$$

którego rozwiązaniem jest

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{12}\left[\frac{7}{2}(S_A+S_B)+\frac{1}{2}(S_E+S_F)+S_C+S_D+S_G+S_H\right],\\
S_2 &= \frac{1}{12}\left[\frac{7}{2}(S_C+S_D)+\frac{1}{2}(S_G+S_H)+S_A+S_B+S_E+S_F\right],\\
S_3 &= \frac{1}{12}\left[\frac{7}{2}(S_G+S_H)+\frac{1}{2}(S_C+S_D)+S_A+S_B+S_E+S_F\right],\\
S_4 &= \frac{1}{12}\left[\frac{7}{2}(S_E+S_F)+\frac{1}{2}(S_A+S_B)+S_C+S_D+S_G+S_H\right].
\end{aligned}
$$



Rys. 11. Obszar, dla którego przedyskutowano wpływ przypadkowego błędu warunku brzegowego na błąd rozwiązań układu równań Liebmanna

Jeśli błąd wartości S w każdym punkcie brzegowym jest taki sam i wynosi δ, wtedy błąd średni kwadratowy każdej z wartości S_i, $i = 1, 2, 3, 4$, wynosi

$$
\Delta S_i = \frac{1}{12}\left(\frac{49}{4}+\frac{49}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1+1+1+1\right)^{1/2}\delta \cong 0{,}45\delta,
$$

a więc jest przeszło dwukrotnie mniejszy od wartości δ. Natomiast błąd maksymalny

$$
\Delta_{\max} S_i = \frac{1}{12}\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+1+1\right)\delta = \delta
$$

jest równy wartości δ.

Podziękowanie

Panu Dr inż. B. MICHALSKIEMU dziękuję za dyskusję niektórych zagadnień związanych z niniejszą pracą.

Dodatek I. Równanie różniczkowe może być wyprowadzone jako warunek znikania wariacji funkcjonału

$$\delta P(S) = \left[\frac{d}{de} P\left(S + eS^1\right)\right]_{e=0}, \tag{I.1}$$

przy czym

$$P(S) = \int\limits_D \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] r\,dr\,dz, \tag{I.2}$$

gdzie D jest polem przekroju rozważanej bryły osiowo-symetrycznej płaszczyzną stałego kąta azymutalnego $\vartheta = \text{const}$.

Przybliżając pochodne cząstkowe w wyrażeniu (I.2) przez różnice przednie

$$\frac{dS}{dr} \cong \frac{S_{i+1,j} - S_{i,j}}{h}, \qquad \frac{dS}{dz} \cong \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j}}{h}, \tag{I.3}$$

gdzie pierwszy wskaźnik „i" numeruje węzły sieci różnicowej w kierunku osi r, drugi wskaźnik „j" — w kierunku osi z, zaś h jest krokiem sieci różnicowej, dostajemy następujący analogon funkcjonału (I.2)

$$P_p(S) = \sum_D \frac{i}{h}\left[(S_{i+1,j} - S_{i,j})^2 + (S_{i,j+1} - S_{i,j})^2\right]. \tag{I.4}$$

Pamiętamy, że $r = ih$.

Sumowanie rozciąga się po wszystkich wskaźnikach i, j należących do obszaru D. Przyjmujemy przy tym konwencję, że różnica wartości funkcji $S_{i+1,j} - S_{i,j}$ lub $S_{i,j+1} - S_{i,j}$ brana w siąsiednich punktach, z których jeden należy do obszaru D, a drugi nie należy, wynosi zero. Znikanie wariacji funkcjonału (I.4) wymaga by spełniony był układ równań

$$(i-1)S_{i-1,j} + i(S_{i+1,j} + S_{i,j+1} + S_{i,j-1}) = (4i-1)S_{i,j}. \tag{I.5}$$

Z kolei przybliżając pochodne cząstkowe w wyrażeniu (I.2) przez iloraz różnicowy wsteczny

$$\frac{dS}{dr} \cong \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{h}, \qquad \frac{dS}{dz} \cong \frac{S_{i,j} - S_{i,j-1}}{h} \tag{I.6}$$

dostajemy następujący analogon funkcjonalu (I.2)

$$P_w(S) = \sum_D \frac{i}{h}\left[(S_{i,j} - S_{i-1,j})^2 + (S_{i,j} - S_{i,j-1})^2\right]. \tag{I.7}$$

Przyjmujemy przy tym konwencję, że różnica wartości funkcji $S_{i,j} - S_{i-1,j}$ lub $S_{i,j} - S_{i,j-1}$ brana w sąsiednich punktach, z których jeden należy do obszaru D, a drugi nie należy, wynosi zero.

Znikanie wariacji funkcjonału (I.7) wymaga by spełniony był układ równań

$$(i+1)S_{i+1,j} + i(S_{i-1,j} + S_{i,j+1} + S_{i,j-1}) = (4i+1)S_{i,j}. \tag{I.8}$$

Można dowieść w sposób podobny, jak to czynią autorzy pracy [8] dla dwuwymiarowego równania Laplace'a, że przy malejącym kroku sieci h rozwiązanie zarówno równania (I.5) jak i (I.8) dąży do rozwiązania równania różniczkowego (7). W związku z tym, zgodnie ze znanym twierdzeniem o granicy sumy ciągów, również rozwiązanie równania powstałego z dodania równań (I.5) i (I.8)

$$(2i-1)S_{i-1,j}+(2i+1)S_{i+1,j}+2i(S_{i,j+1}+S_{i,j-1}) = 8iS_{i,j} \tag{I.9}$$

będącego w istocie równaniem (9), dąży przy $h \to 0$ do rozwiązania równania (7). Równanie różnicowe (9) możemy otrzymać również bezpośrednio z równania różniczkowego (7) przybliżając pierwszą pochodną przez iloraz różnicowy środkowy

$$\frac{dS}{dr} = \frac{S_{i+1,j}-S_{i-1,j}}{2h}; \tag{I.10}$$

oczywiście przybliżamy ponadto

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = \frac{S_{i+1,j}-2S_{i,j}+S_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{S_{i,j+1}-2S_{i,j}+S_{i,j-1}}{h^2}. \tag{I.11}$$

Podany niżej przykład wskazuje, że symetryczna formuła (8), (9) lepiej przybliża równanie różniczkowe niż formuły niesymetryczne (I.5) czy (I.8).

P r z y k ł a d 5. Rozważmy nieskończony stożek sprężysty o kącie wierzchołkowym wynoszącym $2\alpha = \pi/2$, obciążony w wierzchołku wzdłuż osi symetrii siłą F. Wartości naprężeń, a więc i wartości sumy naprężeń S są w takim stożku znane, [24]. W walcowym układzie współrzędnych mamy

$$S = -\frac{Q}{4\pi}\frac{m+1}{m-1}\frac{\cos\theta}{R^2}, \tag{I.12}$$

przy czym

$$Q = F\frac{4(m-1)}{m(1-\cos^3\alpha)-(m-2)(1-\cos\alpha)\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

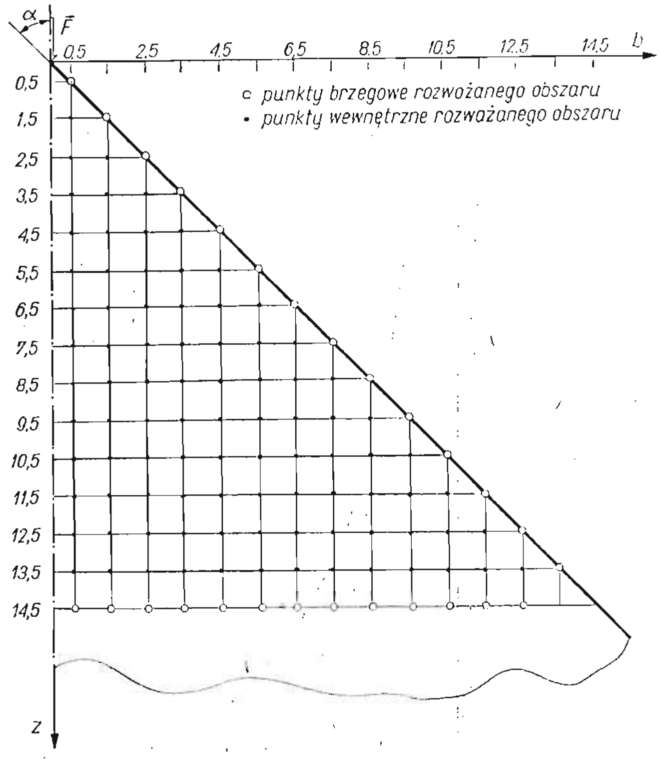
m jest odwrotnością liczby Poissona,

$$R = \sqrt{b^2+z^2}, \qquad \cos\theta = z/R.$$

Wartość siły F przyjęliśmy taką, by

$$\frac{Q}{4\pi}\frac{m+1}{m-1} = 100.$$

Rozpatrzmy obszar stożka zawarty między płaszczyzną $z = 0$ (na której leży wierzchołek stożka), a płaszczyzną $z = 14{,}5$. Przyjmujemy, że na brzegach tego obszaru znamy wartości (teoretyczne) sumy naprężeń S. Wartości S we wnętrzu obszaru znajdujemy posługując się wyprowadzonymi formułami różnicowymi, stosując kwadratową siatkę różnicową o kroku $h = 1$. Rozmieszczenie sieci różnicowej w stosunku do przekroju stożka przedstawione jest na rys. 12. Układ równań różnicowych rozwiązaliśmy metodą

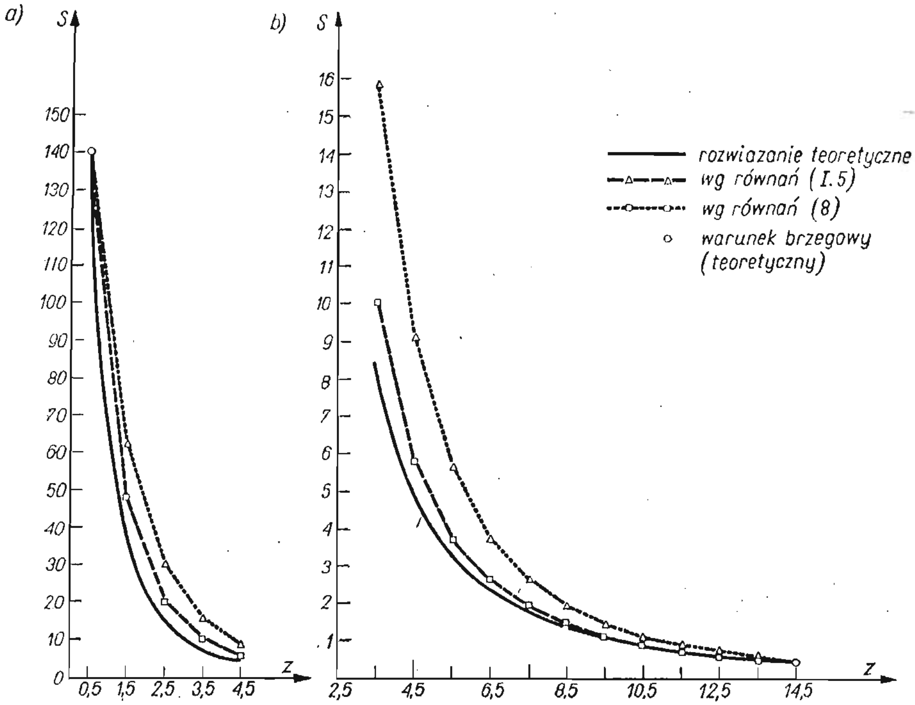


Rys. 12. Położenie sieci różnicowej względem przekroju stożka płaszczyzną ϑ = constans. Stała sieci $h = 1$

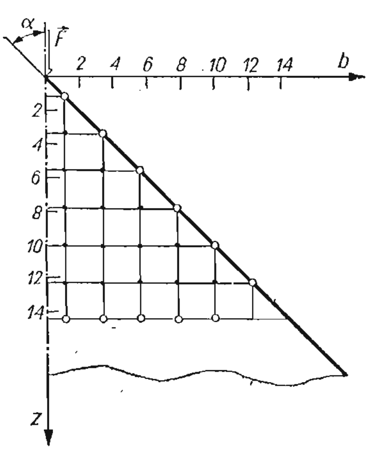
iteracyjną, przy czym kryterium skończenia procesu iteracji było to, by wartości S otrzymane w dwóch kolejnych iteracjach nie różniły się w żadnym z węzłów sieci więcej niż o 10^{-3}. Za zerowe przybliżenie rozwiązania przyjęliśmy dla każdego przekroju z = constans wartość brzegową S tego przekroju. Obliczenia przeprowadziliśmy zarówno za pomocą zsymetryzowanej formuły (8)-(9) jak i formuły (I.5). W obu wypadkach kryterium zakończenia obliczeń zostało osiągnięte po 53 iteracjach. Na rys. 13 porównane są uzyskane w ten sposób wyniki numeryczne z teoretycznymi. Widzimy, że formuła (9) daje wartości znacznie bliższe teoretycznych niż formuła (I.5). Pasują one dość dobrze do rozwiązania teoretycznego nawet w obszarze silnej koncentracji naprężeń, to jest dla małych z.

Można dodać, że wprawdzie osiągnięcie dużej dokładności rozwiązania wymaga odpowiednio dużej liczby iteracji, to jednak w naszym przykładzie już po kilku iteracjach następuje dość dobre przybliżenie funkcji S. Widać to na rys. 15, gdzie podano wyniki kilku pierwszych iteracji przy stosunkowo rzadkiej sieci, o stałej $h = 29/13 = 2{,}23$, pokazanej na rys. 14.

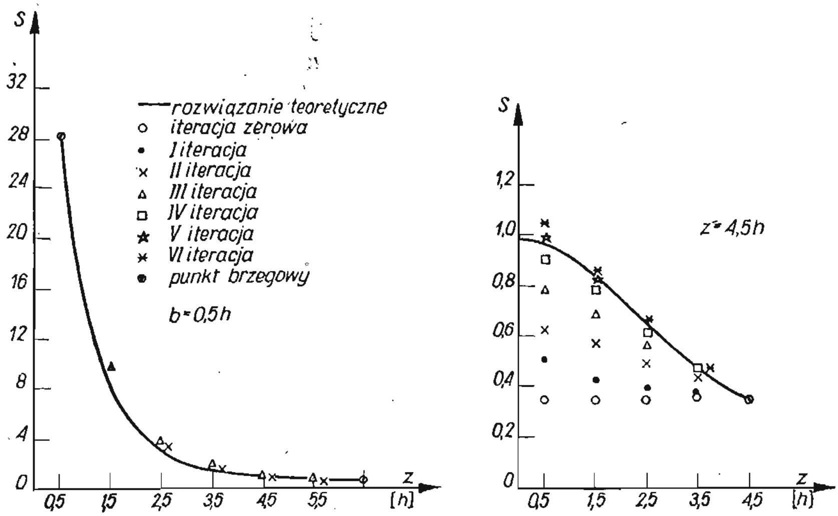
Dodatek II. Rozważmy siatkę kwadratową o długości boku a, naniesioną na badaną tarczę sprężystą. Po odkształceniu ośrodka element siatki przyjmuje w przybliżeniu kształt równoległoboku o długości boku wynoszącej w kierunku x i y odpowiednio a_x i a_y. Zmiany



Rys. 13. Wyniki obliczeń po 53 iteracjach, wg. formuł (9) i (I.5) porównane z rozwiązaniem teoretycznym: a) wyniki dla małych z ($z \leqslant 4{,}5$), b) wyniki dla większych wartości z ($z \geqslant 3{,}5$). Oba wykresy odnoszą się do przebiegu naprężeń wzdłuż prostej $b = 0{,}5$, por. rys. 12



Rys.14. Położenie rzadszej sieci różnicowej względem przekroju stożka; stała sieci $h = 29/13 \cong 2{,}23$



Rys. 15. Wyniki kilku pierwszych iteracji dla sieci różnicowej z rys. 14; a) przebiegi wzdłuż prostej $b = 0{,}5h$, b) przebiegi wzdłuż prostej $z = 4{,}5h$

długości boków są więc $u = a_x - a$ i $v = a_y - a$, średnie odkształcenia na odcinku a są $\varepsilon_x = u/a$ i $\varepsilon_y = v/a$, średnia zaś wartość sumy naprężeń na obszarze oka siatki wynosi

$$S = \sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu}\,\frac{u+v}{a}. \tag{II.1}$$

Jeśli błąd pomiaru położenia punktu wynosi δ, to średni kwadratowy błąd pomiaru długości odcinka wynosi $\sqrt{2}\,\delta$, błąd zaś pomiaru zmiany długości odcinka wynosi $\sqrt{2}\,\sqrt{2}\,\delta = 2\delta$. Względny średni kwadratowy błąd sumy naprężeń wynosi

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\sqrt{2}\,2\delta}{|u+v|}, \tag{II.2}$$

przy czym założyliśmy, że błąd pomiaru składowych przemieszczenia u i v jest taki sam. W korzystnym przypadku, gdy u i v są tego samego znaku i tego samego rzędu wielkości dostajemy

$$\frac{\Delta S}{S} = \sqrt{2}\,\frac{\delta}{u}. \tag{II.3}$$

W mniej korzystnych przypadkach, zwłaszcza gdy u i v są co do modułu tego samego rzędu lecz przeciwnych znaków, błąd jest oczywiście większy. Drukarskie techniki nanoszenia siatki pozwalają wykonywać linie szerokości $0{,}2 \div 0{,}3$ mm, przebieg środka których możemy określić z dokładnością rzędu 0,1 mm; zatem $\delta = 0{,}1$ mm. Aby błąd pomiaru wartości S był nie większy niż 10%, przemieszczenia winny wynosić zgodnie z (II.3) przynajmniej 1,4 mm, co przy $a = 1$ cm odpowiada odkształceniom 14%. Są to więc odkształcenia duże, poza zakresem słuszności klasycznej teorii sprężystości.

Z powyższego widzimy trzy przyczyny powstawania błędu przy tym sposobie wyznaczania sumy $S(x, y)$: a) uśrednianie po obszarze oka siatki zamiast pomiaru punktowego,

b) błąd pomiaru przemieszczenia, c) konieczność stosowania dużych odkształceń. Doświadczalne zmniejszenie jednej z tych przyczyn (przy tej samej technice nanoszenia siatki) pociąga za sobą wzrost przynajmniej jednej z przyczyn pozostałych. Jednakże źródła błędów b) i c) można usunąć na drodze obliczeniowej, korzystając z tego, że $S(x, y)$ winna być funkcją harmoniczną, spełniającą równanie Laplace'a. Równanie to zastępujemy przez układ równań algebraicznych, będących równaniami Liebmanna zapisanymi dla poszczególnych węzłów sieci różnicowej. Węzły sieci różnicowej umieszczamy w środkach poszczególnych elementów siatki. Za zerowe przybliżenie rozwiązania iteracyjnego układu przyjmujemy znalezione doświadczalnie wartości funkcji $S(x, y)$ w poszczególnych okach siatki. Ponieważ znaleziony doświadczalnie przebieg $S(x, y)$ zgodny jest przynajmniej jakościowo z przebiegiem funkcji $S(x, y)$ dla zadania klasycznej teorii sprężystości, dlatego proces iteracyjny jest szybkozbieżny.

Literatura cytowana w tekście

1. H. JESSOP, *Photoelasticity*, Handbuch der Physik, Bd VI, pp. 183-186, Springer, Berlin 1958.
2. S. TIMOSHENKO, J. GOODIER, *Theory of elasticity*, Mc Graw Hill, N. York 1951.
3. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, s. 170, PWN, Warszawa 1970.
4. M. FROCHT, *Photoelasticity*, vol. II, p. 289, J. Wiley, N. York 1948.
5. H. LIEBMANN, *Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildung*, Sitzungsberichte der math. physik. Klasse der Bayerischen Akad. der Wissensch. zu München 1918 J., s. 385.
6. H. BUCHHOLZ, *Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeiter und die Theorie der Figurder Erde*, s. 150 - 176, J. A. Barth, Leipzig 1908.
7. C. RUNGE, *Über eine Methode, die partiell Differentialgleichung Δu = constans numerisch zu integrieren*, Z. f. Math. u. Phys. **56**, 225 (1908).
   L. RICHARDSON, *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **A210**, 307 (1911).
8. R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Mathem. Annalen **100**, 32 (1928).
9. *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, ed. P. FRANK, R. MISES, Part I, p. 734, Dover Publ., N. York 1961.
10. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych*, tłum. z niem., PWN, Warszawa 1960.
11. B. DEMIDOWICZ, I. MARON, E. SZUWAŁOWA, *Metody numeryczne*, cz. II, tłum. ros., PWN, Warszawa 1965.
12. V. TESAŘ, *La photoélasticimétrie et ses applications dans la construction aéronautique*, La Sci. aérienne, **2**, 372 (1933).
    M. MILBAUER, M. PERLA, *Fotoelasticimetrické přistroje a měřici metody*, s. 395-400, Praha 1959.
13. M. FROCHT, op. cit., p. 238.
14. W. SZCZEPIŃSKI, *Method of characteristics in computations of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Polon Sci., Sér. Sci. techn., XII, 619 (1964).
15. B. MICHALSKI, *Zastosowanie warstwy perforowanej do badań przestrzennych w elastooptyce*, praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1973.
16. R. WOJNAR, *Analityczne wyznaczanie dwuwymiarowego st. naprężenia na podstawie danych elastooptycznych* w pracy zbiorowej: «Metody pomiarów odkształceń i naprężeń w materiałach i konstrukcjach budowlanych», red. A. BRANDT, Ossolineum, Warszawa 1971.
17. A. ZAJDEL, *Elementarna ocena błędów pomiarowych*, tłum. ros., PWN, Warszawa 1967.
18. R. DOROSZKIEWICZ, *Elastooptyka*, PWN, Warszawa 1975.
19. A. BRANDT, *Metoda pomiaru sześciu składowych stanu odkształcenia*, praca zbiorowa cytowana w [16].

20. Е. Филимонова, *Определение напряжений в осесимметрической задаче на обьемных моделях из оптически чувствительными вклейками*, Труды VII всесоюзной конференции по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений, Таллин, 23—26 ноября 1971, Таллин 1971.
21. Н. С. Розанов, *Метод тензосетки и его приложение к исследованию напряженного состояния гидросооружений*, Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. В. Е. Веденеева, техническая информация, Москва 1958.
22. J. Heymann, *Eine Verbindung der Spannugsoptik mit der Dehnungsgittermethode*, Beiträge zur Spannungs- und Dehnungsanalyse, Bd. V, hgb. K. Schröder, Akademie-Verlag, Berlin 1968.
23. B. Michalski, informacja ustna.
24. A. I. Lurje, *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie*, tłum. z ros., Akademie-Verlag, Berlin 1963, s. 140.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЛИБМАННА ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ФОТО-УПРУГИХ ИСПЫТАНИЙ

Представлена возможность использования разностных формул типа Либманна для обработки результатов фото-упругих испытаний. В частности это относится к:

а) интерполяции результатов, полученных экспериментальными точечными методами;

б) экстраполяции результатов — однако лишь в небольшой области, порядка величины шага разностной сетки;

в) проверке и уточнению измеренных величин суммы нормальных напряжений.

Даны примеры применения этого подхода к плоской и осесимметричной задачам теории упругости.

S u m m a r y

APPLICATION OF THE LIEBMANN FORMULA TO THE EVALUATION OF PHOTOELASTIC MEASUREMENTS

The possibilities of a using of the difference expressions of Liebmann's type in the evaluation of the results of photoelastic investigations are discussed. The following techniques are considered:

a) interpolation of the results obtained by experimental point methods,

b) extrapolation of the results — but only in a limited region, of the order the difference mesh size,

c) verification and improvement of accuracy of the measured values of a sum of normal stresses.

The examples of application of these possibilities to plane and axially symmetric problems of elasticity are given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lipca 1975 r.; w wersji ostatecznej dnia 2 sierpnia 1976 r.