

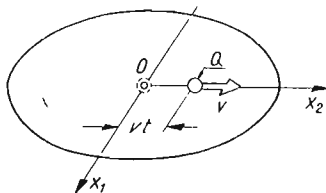
O WYZNACZANIU NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH WYWOŁANYCH RUCHOMYMI OBCIĄŻENIAMI TERMICZNYMI

JÓZEF KUBIK (POZNAŃ)

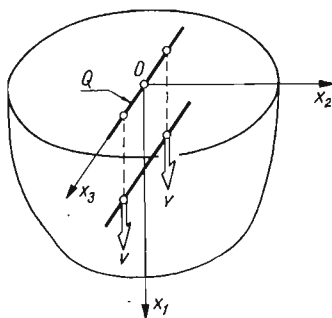
Oznaczenia

- α_t współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,
- $\eta(\xi)$ funkcja Heaviside'a,
- $\delta(\xi)$ funkcja Diraca,
- G moduł odkształcenia postaciowego,
- κ współczynnik przewodzenia temperatury,
- λ stała Lamégo,
- σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia,
- t czas,
- T temperatura względna, odniesiona do stałej temperatury stanu beznaprężeniowego,
- u_i współrzędne wektora przemieszczenia,
- x_i, ξ_i współrzędne kartezjańskie.

Badanie efektów mechanicznych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi w ośrodkach sprężystych stanowi istotną część obszernej dziedziny termosprężystości i odgrywa dużą rolę w praktyce inżynierskiej. Pola naprężeń i odkształceń w takich przypadkach najczęściej są wywołane ruchomymi źródłami ciepła o charakterze punktowym,



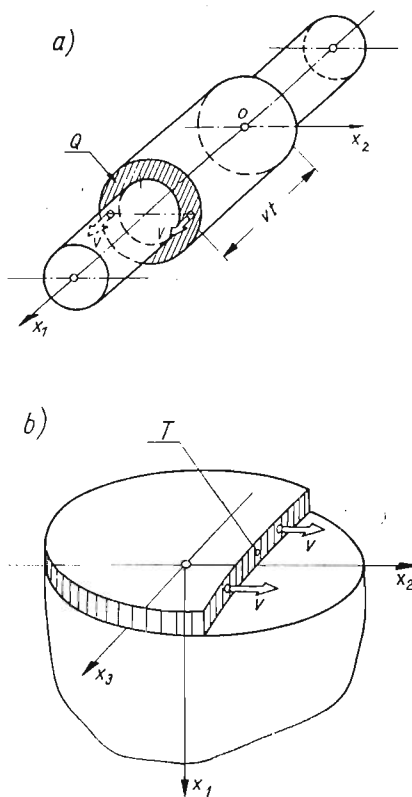
Rys. 1



Rys. 2

liniowym lub powierzchniowym, o zmiennej lub stałej wydajności w czasie. Źródła mogą się przemieszczać w ośrodku lub po jego powierzchni z prędkością v . Przykładowo, działanie ruchomych źródeł przedstawiono na rys. 1, 2, 3a, b.

Z wyżej wymienionym charakterem obciążeń termicznych spotykamy się w licznych procesach technologicznych, np. hartowania powierzchniowego, spawania, napawania,



Rys. 3

zgrzewania liniowego oraz przy opływach elementów konstrukcyjnych (powłoki, rury) przez płyny o podwyższonej lub obniżonej temperaturze w porównaniu z temperaturą elementu. Ponadto ruchome obciążenia termiczne występują (obok obciążeń typu mechanicznego) przy każdej kinematycznej współpracy elementów konstrukcji z uwzględnieniem tarcia.

Prezentowana praca zawiera pewien przegląd dotychczas publikowanych rozwiązań zadań termosprężystości z ruchomymi źródłami ciepła (por. [1]–[33]). Przedmiotem dyskusji są warunki stosowania ruchomych układów współrzędnych, kolejności stosowania transformacji całkowitych do ruchomych obciążeń termicznych oraz budowy rozwiązań równań termosprężystości przy wykorzystaniu funkcji Greena.

1. Ruchome układy współrzędnych

Wyznaczanie naprężeń cieplnych wywołanych ruchomymi obciążeniami termicznymi sprowadza się do rozwiązania podstawowego układu równań termosprężystości:

$$(1.1) \quad \nabla^2 T - \frac{1}{\kappa} \dot{T} = -\frac{1}{\kappa} Q(x_i, t, v),$$

$$(1.2) \quad G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) \partial_i \varepsilon_{ll} - (3\lambda + 2G) \alpha_i \partial_i T = \varrho \ddot{u}_i,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, l = 1, 2, 3$$

przy zadanych warunkach początkowych i brzegowych. Równanie (1.1) jest równaniem przewodnictwa cieplnego, natomiast równania (1.2) są znanymi równaniami przemieszczeniowymi.

W większości prac poświęconych omawianym zagadnieniom, do rozwiązywania równania przewodnictwa (1.1) wykorzystuje się ruchome układy współrzędnych związane z poruszającymi się źródłami ciepła. Przewodzi to do znacznych ułatwień przy budowie rozwiązań tego równania. W takim przypadku, po zastosowaniu liniowej transformacji układu współrzędnych według związków

$$\xi_i = x_i - v_i t, \quad (i = 1, 2, 3), \quad v_i = \text{const},$$

równanie przewodnictwa (1.1) w ruchomym układzie współrzędnych ξ_i ma postać

$$(1.3) \quad \nabla_{\xi}^2 \hat{T} - \frac{1}{\kappa} (\vec{v} \cdot \nabla_{\xi} \hat{T}) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = - \frac{1}{\kappa} \hat{Q}(\xi_i, t),$$

$$\nabla_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right),$$

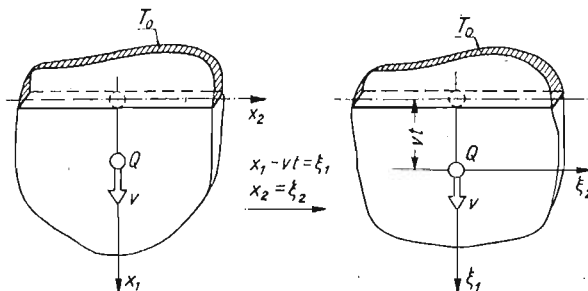
przy czym rozważane źródło ciepła jest nieruchome. Jeśli ponadto intensywność źródła nie zależy od czasu, czyli $\hat{Q} = \hat{Q}(\xi_i)$ oraz wpływ warunków początkowych można pominąć,

to pochodna $\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \equiv 0$ i równanie (1.3) przyjmuje postać

$$(1.4) \quad \nabla_{\xi}^2 \hat{T} - \frac{1}{\kappa} (\vec{v} \cdot \nabla_{\xi} \hat{T}) = - \frac{1}{\kappa} \hat{Q}(\xi_i).$$

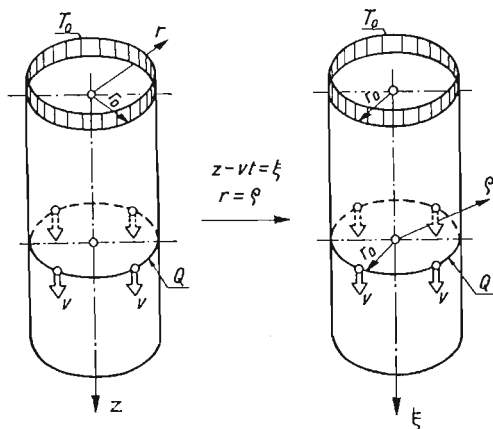
Równanie (1.4) odpowiada quasi-ustalonym zagadnieniom termosprężystości. Należy nadmienić, że większość prac poświęconych ruchomym obciążeniom termicznym dotyczy właśnie zagadnień quasi-ustalonych.

Możliwość stosowania ruchomych układów współrzędnych zależy od kształtu i ruchu rozważanych źródeł oraz od kształtu badanego obszaru. W obszarze nieograniczonym i przy źródłach o niezmiennym w czasie kształcie, stosowanie ruchomych układów współrzędnych ułatwia wyznaczanie pól temperatur i naprężeń. W przypadku działania ruchomo-



Rys. 4

mych źródeł w ośrodkach ograniczonych wprowadzanie ruchomych układów współrzędnych nie ułatwia procesu rozwiązywania równań termosprężystości (1.1) i (1.2). Wtedy bowiem kosztem «unieruchomienia» źródła ciepła brzeg obszaru staje się ruchomy. Ilustrują to przykłady pokazane na rys. 4 i 5. W takich przypadkach przy wyznaczaniu rozwiązań pojawiają się trudności ze stosowaniem transformacji Laplace'a.



Rys. 5

Analogiczne uwagi dotyczą przypadków, w których zmienia się w czasie kształt geometryczny obciążeń termicznych, np.: gdy źródła ciepła typu $Q = T_0 \eta(vt - r) \eta(t)$ lub $Q = T_0 \delta(R - vt) \eta(t)$, działają odpowiednio na powierzchni koła o zmieniającym się w czasie promieniu r lub na powierzchni kuli o zmiennym w czasie promieniu R . Wygodniej zatem rozważać obszary ograniczone we współrzędnych nieruchomych związanych z tymi obszarami.

2. Wykorzystanie funkcji Greena

Przy budowie rozwiązań równań termosprężystości w przypadku ruchomych obciążeń termicznych możemy również wykorzystać metodę funkcji Greena. Znajomość odpowiednich funkcji Greena pozwoli nam otrzymać rozwiązania dla ruchomych źródeł ciepła o wydatku zmiennym w czasie i względem miejsca.

Rozwiązania równań termosprężystości dla chwilowego źródła ciepła $Q_0 \delta(\xi_i) \delta(t)$ w przestrzeni nieograniczonej w układzie współrzędnych ξ_i wyznaczono w pracy [31]. Rozwiązania te wyznaczono w ruchomym układzie współrzędnych ξ_i , który porusza się ze stałą prędkością v względem układu nieruchomego x_i w kierunku osi x_3 . Otrzymane w tym przypadku wyniki dla temperatury $\hat{T}^*(\xi_i, t)$ i przemieszczeń $\hat{u}_j^*(\xi_i, t)$ można wykorzystać przy wyznaczaniu temperatury i przemieszczeń dla źródła o wydatku zmiennym w czasie w układzie ξ_i według wzorów

$$(2.1) \quad \begin{cases} \hat{T}(\xi_i, t) = \int_0^t \hat{Q}(\tau) \hat{T}^*(\xi_i, t - \tau) d\tau, \\ \hat{u}_j(\xi_i, t) = \int_0^t \hat{Q}(\tau) \hat{u}_j^*(\xi_i, t - \tau) d\tau. \end{cases}$$

Jeżeli ponadto źródło działa na pewnym obszarze I , to temperaturę i przemieszczenia otrzymamy na podstawie związków:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \hat{T}^I(\xi_i, t) = \int_I \hat{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) \hat{T}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3, \\ \hat{u}_j^I(\xi_i, t) = \int_I \hat{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) \hat{u}_j^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, t) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \end{cases}$$

Posługiwanie się funkcjami $\hat{T}^*(\xi_i, t)$ i $\hat{u}_j^*(\xi_i, t)$, jak łatwo zauważyć, ogranicza się tylko do źródeł ciepła, które w układzie ξ_i nie zmieniają w czasie zajmowanego obszaru.

Takie ograniczenia nie występują natomiast, gdy funkcję Greena dla poruszających się źródeł wyznaczmy w układzie nieruchomym x_i . Jeżeli np. wyznaczmy rozkład temperatury $T^\delta(x_i, t; v)$ i naprężeń $\sigma_{ij}^\delta(x_i, t; v)$ dla poruszającego się źródła punktowego o postaci $Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(vt - x_3) \eta(t)$, to dla źródeł liniowych typu

$$(2.3) \quad \begin{cases} 1^\circ Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \eta(vt - x_3) \eta(t), \\ 2^\circ Q_0 \delta(x_1) \delta(x_2) \eta(x_3 - vt) \eta(t), \end{cases}$$

temperaturę i naprężenia otrzymamy odpowiednio przez superpozycję

$$(2.4) \quad \begin{cases} T^{1^\circ}(x_i, t; v) = \int_0^{vt} T^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du, \\ \sigma_{ij}^{1^\circ}(x_i, t; v) = \int_0^{vt} \sigma_{ij}^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du, \end{cases}$$

oraz

$$(2.5) \quad \begin{cases} T^{2^\circ}(x_i, t; v) = \int_{vt}^\infty T^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du, \\ \sigma_{ij}^{2^\circ}(x_i, t; v) = \int_{vt}^\infty \sigma_{ij}^\delta(x_1, x_2, x_3 - u, t; v) du. \end{cases}$$

Wykorzystując natomiast temperaturę $\bar{T}^\delta(r, z, t; v)$ i naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}^\delta(r, z, t; v)$ wywołane działaniem źródła $Q_0 \delta(z) \delta(vt - r) \eta(t)$, możemy wyznaczyć temperaturę i naprężenia dla źródła działającego na powierzchni koła o zmiennym w czasie promieniu, tzn. dla źródła o postaci $Q_0 \delta(z) \eta(vt - r) \eta(t)$. Poszukiwane rozwiązania mają postać

$$(2.6) \quad \begin{cases} T^\eta(r, z, t; v) = \int_0^{vt} \bar{T}^\delta(r - u, z, t; v) du, \\ \sigma_{ij}^\eta(r, z, t; v) = \int_0^{vt} \bar{\sigma}_{ij}^\delta(r - u, z, t; v) du. \end{cases}$$

W przytoczonych wyżej rozważaniach zakładaliśmy milcząco, że prędkość ruchu źródła v jest stała. W przypadku prędkości v zmiennej w czasie we wszystkich otrzymanych wzorach należy w miejsce vt podstawić $\int_0^t v dt$.

O słuszności stosowanej we wzorach (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) superpozycji świadczą prace autora oraz prace [1] i [32].

3. Stosowanie transformacji całkowych

Przy rozwiązywaniu równań (1.1) i (1.2) wykorzystuje się najczęściej całkową transformację względem współrzędnych miejsca oraz transformację Laplace'a względem czasu.

W przypadku rozważania ruchomych obciążeń termicznych (ruchome źródła ciepła lub ruchome warunki brzegowe) przy konstrukcji rozwiązań podstawowych, wyżej wymienione transformacje całkowe należy stosować z pewną ostrożnością. Omówimy to bliżej na przykładzie płaskiego ruchomego źródła ciepła działającego w przestrzeni nieograniczonej. Kierunek ruchu źródła oraz intensywność jego działania opisuje wzór

$$(3.1) \quad Q(x, t) = Q_0 \delta(vt - x) \eta(t),$$

gdzie $\delta(u)$ jest funkcją Diraca, $\eta(u)$ — funkcją Heaviside'a.

Dyskusję ograniczymy do zbadania równania przewodnictwa cieplnego, które w tym przypadku ma postać

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} T - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} T = - \frac{Q_0}{\kappa} \delta(vt - x) \eta(t),$$

przy czym funkcja temperatury T , określona jest w obszarze $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in [0, +\infty)$, zaś parametr $v \geq 0$. Po wykorzystaniu jako pierwszej transformacji Laplace'a względem czasu zdefiniowanej jak następuje

$$\begin{cases} T_L(x, s) = \int_0^\infty T(x, t) e^{-st} dt, \\ T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} T_L(x, s) e^{st} ds, \quad i = \sqrt{-1}, \end{cases}$$

oraz przyjęciu jednorodnego warunku początkowego dla temperatury równania (3.2), możemy napisać

$$(3.3) \quad \frac{d^2}{dx^2} T_L - \frac{s}{\kappa} T_L = - \frac{Q_0}{\kappa} \frac{1}{v} e^{-s \frac{x}{v}},$$

przy czym transformata źródła ciepła (prawa strona równania (3.3)) wymaga, aby $x > 0$. Fakt ten wyklucza stosowanie do równania (3.3) wykładniczej transformacji Fouriera względem x . W tym przypadku możliwe jest zastosowanie transformacji cosinusowej lub sinusowej, jednakże pod warunkiem, że z góry wiemy czy funkcja $T_L(x, s)$ jest funkcją parzystą lub nieparzystą względem x . Tę niedogodność można usunąć uwzględniając w prawej stronie równania (3.3) funkcję Heaviside'a w postaci $\eta(x)$.

Przedstawionych trudności unika się, jeżeli do równania (3.2) zastosować w pierwszej kolejności transformację Fouriera względem zmiennej miejsca, a następnie transformację Laplace'a względem czasu. Poprawność tak stosowanych transformacji można wykazać wykonując przejścia graniczne dla $v \rightarrow 0$ w otrzymanych wynikach, które w granicy są zgodne z rozwiązaniami dla źródła nieruchomego.

Literatura cytowana w tekście

1. F. BRYNDZA, *Pole temperatury w rurze półnieskończonej wywołane działaniem ruchomego źródła ciepła*, Dysertacja na stopień doktora nauk technicznych, Politechnika Poznańska, Poznań 1974.
2. J. IGNACZAK, *Dynamic displacement field produced by a point source of heat moving with uniform velocity in an infinite elastic solid*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 3, **12**, (1964).
3. A. JAHANSHAH, *Elastic plates subjected to moving heat sources*, Journ. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs, 4, **91**, 1, (1965).
4. A. JAHANSHAH, *Thermoviscoelastic stresses for moving temperature fields*, Jour. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs, 2, **92** (1966).
5. В. А. Колесниченко, Ю. М. Коляно, *Температурные напряжения в анизотропной пластинке нагреваемой движущимся источником тепла*, ФХОМ, **5** (1971).
6. Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик, *Квазистатическая задача термоупругости для полубесконечной пластинки по ребру которой движется источник тепла*, П. Мех. **7**, **11** (1975).
7. J. KONIECZNY, *Naprężenia w półprzestrzeni sprężystej wywołane przyłożoną na brzegu temperaturą*, Zeszyty Naukowe PP (w druku).
8. J. KRZEMIŃSKI, *Thermal stresses in an infinite cylindrical shell due to a moving heat source*, Arch. Mech. Stos. **3**, **17** (1965).
9. J. KUBIK, *Pole temperatury, naprężeń i przemieszczeń w tarczy półnieskończonej wywołane działaniem ruchomego źródła ciepła*, Dysertacja na stopień doktora nt., PP Poznań 1972.
10. J. KUBIK, *Naprężenia termiczne w półprzestrzeni sprężystej wywołane ruchomym źródłem ciepła*, Rozp. Inż. **2**, **22** (1974).
11. J. KUBIK, *Jednowymiarowe dynamiczne pole naprężeń cieplnych wywołane ruchomym polem temperatury*, Mech. Teoret. Stos., **2**, **13**, (1975).
12. J. KUBIK, *Wpływ prędkości ruchu źródła ciepła na efekty mechaniczne w półprzestrzeni sprężystej*, Arch. Budowy Maszyn, **1**, **23** (1976).
13. Г. С. МАКАР, *Напряженное состояние в бесконечном цилиндре вызванное движущимся осесимметричным температурным полем*, Вопр. Мех. Реальн. Тверд. Тела, в. 3, Наукова Думка, **42** (1964).
14. E. MELAN, *Warmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle*, Ing. Arch., **20**, 46 (1952).
15. M. R. AKIYAMA, K. NAKANO, Y. BANZAI, *Thermal stresses in an infinite circular cylinder exposed to moving heat sources*, Bull. JSME **7**, 506 (1964).
16. T. NAKADA, S. HASHIMOTO, *Heat conduction in a semi-infinite solid heated by a moving heat source along the boundary*, Bull. JSME, **6**, **59** (1963).
17. W. NOWACKI, *A quasi-stationary thermoelastic problem in three dimensions*, BULL. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **5** (1957).
18. W. NOWACKI, *O pewnym quasi-ustalonym zagadnieniu termosprężystości*, Rozp. Inż., **3**, **5** (1957).
19. W. PAJĄK, *Wpływ ruchomego, gasnącego po czasie t nagrzania brzegu na pola temperatury, naprężeń i przemieszczeń w sprężystej tarczy półnieskończonej*, Dysertacja na stopień doktora nt., Poznań 1973.
20. W. PIECHOŃSKI, *The stresses in an infinite wedge due to a heat source*, Arch. Mech. Stos. **11**, (1959).
21. В. Г. ПЕТРЕНКО, *К вопросу распределения температурного поля во полуограниченной составной пластине при наличии движущегося точечного источника*, Укр. Мат. Ж., **4**, **19** (1967).
22. Я. С. ПОДСТРИГАЧ, Р. Н. ШВЕЦ, *Осесимметричное напряженное состояние в бесконечной цилиндрической оболочке вызванное движущимся температурным полем*, Теория пластин и оболочек, Киев 1962.
23. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long circular cylinder with heat moving over the lateral surface*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., **5**, **12** (1964).
24. T. ROŻNOWSKI, *An axially symmetric thermoelastic problem with a moving boundary condition*, Arch. Mech. Stos., **5**, **17** (1965).
25. T. ROŻNOWSKI, *Non-steady state of temperature in a long cylinder with moving boundary condition*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., **1**, **13** (1965).

26. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarne pole temperatury w półprzestrzeni w przypadku ruchomego ogrzania na brzegu*, Rozpr. Inż., 4, 17 (1968).
27. T. ROŻNOWSKI, *The plane problem of thermoelasticity with a moving boundary condition*, Arch. Mech. Stos., 5, 21 (1969).
28. T. ROŻNOWSKI, *Niestacjonarny przepływ ciepła w grubej rurze ogrzanej ruchomym polem temperatury*, Rozpr. Inż., 4, 19 (1971).
29. D. ROSENTAL, *The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments*, Trans. ASME, 8 (1946).
30. D. ROSENTAL, R. H. CAMERON, *Temperature distribution in cylinder heated by point source moving along its axis*, Trans. ASME.
31. Z. SOB CZYŃSKA, *Działanie ruchomego punktowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej*, Mech. Teoret. Stos. 1, 7 (1969).
32. S. SZYMAŃSKI, *Ruchome źródło ciepła w półnieskończonej tarczy*, Dysertacja na stopień doktora nt., Poznań (1972).
33. M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a visco-elastic space and certain basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., 2, 13 (1961).

Р е з ю м е

ПРИМЕЧАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕПЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВЫЗВАННЫХ ДВИЖУЩИМИСЯ ТЕРМИЧЕСКИМИ НАГРУЗКАМИ

Работа содержит обсуждение опубликованных до сих пор решений задач термоупругости с движущимся источником тепла. Предметом дискуссии являются вопросы, характерные для движущихся нагрузок, а именно: в каких случаях применение движущейся системы координат облегчает решение уравнений термоупругости, возможность построения решений с использованием функций Грина, условия применения интегральных преобразований по координатам и времени при исследовании подвижных термических напряжений.

Summary

ON THE DETERMINATION OF THERMAL STRESSES DUE TO MOVING HEAT SOURCES

The paper contains a review of the existing solutions of thermoelastic problems involving the moving heat sources (cf. [1 - 33]). The discussion is concerned with the application of convective coordinate systems, the order of application of integral transforms to moving thermal loadings, and the construction of thermoelasticity solutions by means of the Green functions.

PRACOWNIA TEORII KONSOLIDACJI
I TERMODYFUZJI IPPT POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1975 r.