

METODA STEROWANIA MODALNEGO I JEJ ZASTOSOWANIE DO USTATECZNIANIA LOTU  
ŚMIGŁOWCA

JÓZEF PIETRUCHA, ZBIGNIEW SZEWCZYK (WARSZAWA)

Oznaczenia

- A** macierz stanu układu niesterowanego o wymiarach  $n \times n$ ,
- B** macierz sterowania o wymiarach  $n \times r$  i kolumnach  $\mathbf{b}_j$ ,
- H** macierz stanu układu sterowanego,
- J** macierz blokowa Jordana,
- K** macierz współczynników wzmocnienia o elementach  $k_{ij}$ ,
- P** macierz sterowalności modalnej o elementach  $p_{ij}$ ,
- U** macierz wektorów własnych macierzy **A** o kolumnach  $\mathbf{u}_j$ ,
- V** macierz wektorów własnych macierzy **A** o kolumnach  $\mathbf{v}_j$ ,
- g** wektor wzmocnienia,
- u**  $r$ -wymiarowy wektor sterowania,
- x**  $n$ -wymiarowy wektor stanu,
- $u$  prędkość pozioma,
- $w$  prędkość pionowa,
- $q$  prędkość kątowna pochylenia,
- $\theta$  kąt pochylenia,
- $\Omega R$  prędkość końca łopaty wirnika nośnego,
- $\delta_{ij}$  delta Kroneckera,
- $\lambda_j$  wartości własne układu niesterowanego,
- $\rho_j$  wartości własne układu sterowanego,
- $U_c$  sterowanie skokiem ogólnym łopaty wirnika nośnego,
- $U_p$  sterowanie skokiem cyklicznym łopaty wirnika nośnego w kierunku podłużnym,
- $(\cdot)^T$  transponowanie,
- $(\cdot)^*$  sprzężanie.

1. Wstęp

W ostatnich latach intensywnie rozwija się metoda sterowania modalnego [1—16], której prekursorem był ROSENBROCK [17]. Według określenia [18] sterowanie modalne jest syntezą bezinercyjnego sprzężenia zwrotnego zmieniającego wartości własne liniowego stacjonarnego układu dynamicznego na wartości z góry dane. Syntezę prowadzi się korzystając z pojęcia przestrzeni stanów [19]. Przez odpowiedni dobór położenia wartości własnych układu można dokonać syntezy układów o pożądanym własnościach dynamicznych.

Celem niniejszej pracy nie jest dokonanie przeglądu publikacji na temat sterowania modalnego, chociaż cel taki byłby całkowicie uzasadniony. W chwili obecnej brak jest bowiem kompletnego i aktualnego przedstawienia wiedzy w tej dziedzinie.

Praca nasza poświęcona jest natomiast przedstawieniu sterowania modalnego w ujęciu PORTERA i CROSSLEYA [8]. O ile nam wiadomo, ujęcie to jest w Polsce mało znane, a w pełni zasługuje na szersze upowszechnienie. Dlatego też główny wysiłek został skierowany na wypełnienie tej właśnie luki. Starano się to uzyskać w następujący sposób:

- ujęcie z [8] zostało uzupełnione istotnymi założeniami i najważniejszymi faktami, będącymi podstawą rozważań;
- rozważania te przedstawiono w uporządkowanej i zwartej formie;
- ułożono przejrzyste algorytmy, których możliwości obliczeniowe zilustrowano przykładem ustalenia lotu śmigłowca;
- uwypuklono przydatność i dogodność omówionej metody do obliczeń na komputerach;
- podano wykaz najnowszej literatury krajowej i zagranicznej z tej dziedziny.

Spodziewamy się zatem, że przedstawiona w ten sposób praca może być przydatna przy projektowaniu układów sterowania stosowanych w różnych dziedzinach techniki.

## 2. Elementy teorii sterowania modalnego

### 2.1. Główna idea sterowania modalnego. Rozważmy układ opisany równaniem

$$\dot{x}(t) = ax(t).$$

Rozwiązanie takiego równania ma postać

$$x(t) = x(0)\exp(at).$$

Jest widoczne, że charakterystyka dynamiczna tego układu zależy od parametru  $a$  i układ będzie np. niestateczny, jeżeli  $a > 0$ . Wprowadźmy do tego układu sterowanie liniowe w postaci sprzężenia zwrotnego

$$u(t) = kx(t).$$

Równanie układu zamkniętego będzie miało postać

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) = (a + bk)x(t).$$

Rozwiązanie takiego równania dane jest wzorem

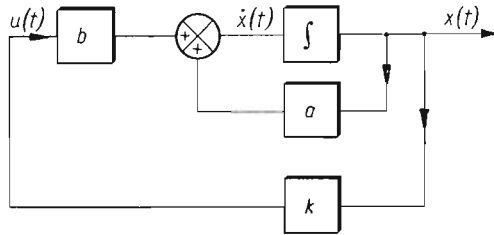
$$x(t) = x(0)\exp(\sigma t),$$

gdzie  $\sigma = a + bk$ .

Charakterystyka dynamiczna układu zamkniętego zależy od wartości  $\sigma$ . Jeżeli zażądamy, żeby  $\sigma$  przyjęło z góry daną wartość  $s$  spełniającą np. warunek stateczności, to współczynnik  $k$  musi spełniać zależność

$$k = (s - a)/b.$$

Tak więc dla realizacji układu o danej charakterystyce dynamicznej musimy wprowadzić do układu otwartego gałąź sprzężenia zwrotnego o współczynniku wzmocnienia  $k = (s - a)/b$ . Przepływ sygnałów dla układu zamkniętego ilustruje rys. 1.



Rys. 1

**2.2. Założenia ogólne.** Teoria sterowania modalnego może być stosowana do wyznaczenia sygnału sterującego dla układu opisywanego układem liniowych równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych o stałych współczynnikach. W niniejszej pracy rozważania ograniczone będą tylko do przypadków układów o parametrach skupionych.

W rozważaniach nie zakłada się żadnej szczególnej postaci macierzy sterowania (por. [1]). Macierz sterowania obrazująca sposób wprowadzenia sterowania do układu ma więc taką postać, jaka wynika z analizy układu.

Bardzo istotne jest założenie szczególnej postaci wektora sterowania. Zakłada się mianowicie, że jest on kombinacją liniową zmiennych stanu, określoną odpowiednim wektorem własnym transponowanej macierzy stanu. Przyjęcie tego założenia pozwala na sterowanie dowolnie wybraną charakterystyką układu bez oddziaływania na pozostałe. Praktyczna realizacja tego założenia wymaga jednak mierzania, w sensie technicznym, wszystkich zmiennych stanu.

Będziemy rozważać liniowy stacjonarny układ dynamiczny ( $L$ ) opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

Przytoczymy najpierw podstawowe fakty teorii sterowania modalnego [2].

**Określenia:** 1. Niech  $\Lambda_L = \{\lambda: \lambda \text{ jest wartością własną macierzy } \mathbf{A}\}$ . Niech  $\Lambda_S \subset \Lambda_L$  będzie zbiorem  $m$  ( $m \leq n$ ) wartości własnych zespolonych sprzężonych. Niech  $\Gamma = \{\varrho_1, \dots, \varrho_m\}$  będzie zbiorem dowolnych liczb zespolonych sprzężonych. O układzie ( $L$ ) mówimy, że jest modalnie sterowalny względem  $\Lambda_S$ , jeżeli istnieje stała macierz  $\mathbf{G}$  o wymiarach  $r \times n$  taka, że wartości własne macierzy  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})$  należą do zbioru  $\Gamma \cup (\Lambda_L \sim \Lambda_S)$ . Macierz  $\mathbf{G}$  jest nazywana macierzą wzmocnienia.

2. Jeżeli  $m = n$  i układ ( $L$ ) jest modalnie sterowalny względem  $\Lambda_L$  to mówimy, że ( $L$ ) jest całkowicie modalnie sterowalny.

3. Mówimy, że układ ( $L$ ) jest całkowicie sterowalny (w sensie Kalmana), jeżeli dla dowolnego stanu początkowego  $\mathbf{x}(0)$  istnieje taki wektor sterowania  $\mathbf{u}(t)$ , który doprowadzi układ do dowolnego stanu końcowego  $\mathbf{x}(t_k)$  w skończonym przedziale czasu  $(0, t_k)$  (zob. np. [12]).

**Twierdzenie:** Układ ( $L$ ) jest całkowicie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie modalnie sterowalny.

**Wniosek:** Teoria sterowania modalnego może być stosowana bezpośrednio dla układów całkowicie sterowalnych, natomiast dla pozostałych po uprzednim oddzieleniu części

niesterowalnej. Sposób jednoznacznego rozpoznawania części sterowalnej i niesterowalnej układu zostanie podany dalej, po przeprowadzeniu niezbędnych rozważań.

**2.3. Przypadek pojedynczych wartości własnych [8]. Układ jednoweściowy.** Przeprowadzimy rozważania dla układu, w którym istnieją zarówno zespolone, jak i rzeczywiste wartości własne. Ułożymy algorytm, który pozwoli zmieniać dowolną liczbę wartości własnych rzeczywistych i dowolną liczbę par sprzężonych wartości własnych zespolonych. Założymy przy tym, że układ jest całkowicie sterowalny. Przy założeniu, że układ jest jednoweściowy ( $r = 1$ ) równanie (L) będzie miało prostszą postać

$$(2.3.1) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),$$

gdzie  $\mathbf{A}$  — macierz stanu o wymiarach  $n \times n$  mająca rzeczywiste i zespolone pojedyncze wartości własne.

Zakładamy, że będziemy zmieniać  $m$  ( $m < n$ ) wartości własnych. W tym celu należy wygenerować  $m$  sygnałów sterujących w postaci kombinacji liniowej zmiennych stanu

$$(2.3.2) \quad s_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j = \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Sygnały te wzmacniane są przez  $m$  członów proporcjonalnych o wzmocnieniu  $k_i$ , w wyniku czego otrzymujemy sterowanie

$$(2.3.3) \quad u(t) = \sum_{i=1}^m k_i s_i = \sum_{i=1}^m k_i \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}(t).$$

Podstawiając (2.3.2) do (2.3.1) otrzymamy równanie dla układu zamkniętego

$$(2.3.4) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \left( \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^m k_i \boldsymbol{\mu}_i^T \right) \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t).$$

Z równania (2.3.4) wynika, że efektem przyjęcia sygnału sterującego w postaci (2.3.2) jest zmiana macierzy stanu  $\mathbf{A}$  na nową macierz  $\mathbf{H}$

$$(2.3.5) \quad \mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^m k_i \boldsymbol{\mu}_i^T.$$

Jeżeli teraz za wektor  $\boldsymbol{\mu}_i$  przyjmiemy wektor własny  $\mathbf{v}_i$  (zob. p. 2.2), to macierz układu sterowanego będzie miała postać

$$(2.3.6) \quad \mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^m k_i \mathbf{v}_i^T.$$

Ponieważ  $\mathbf{u}_r$  jest wektorem własnym macierzy  $\mathbf{A}$ , to

$$(2.3.7) \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_r = \lambda_r \mathbf{u}_r, \quad r = 1, \dots, n.$$

Podobnie

$$(2.3.8) \quad \mathbf{A}^T \mathbf{v}_s = \lambda_s \mathbf{v}_s, \quad s = 1, \dots, n.$$

Uwzględniając, że wektory własne macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{A}^T$  są ortonormalne, tzn. spełniają związek

$$(2.3.9) \quad \mathbf{v}_s^T \mathbf{u}_r = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, \dots, n,$$

możemy ze wzoru (2.3.6) otrzymać

$$(2.3.10) \quad \mathbf{H}\mathbf{u}_t = \mathbf{A}\mathbf{u}_t = \lambda_t \mathbf{u}_t \quad \text{dla} \quad m+1 \leq t \leq n,$$

$$(2.3.11) \quad \mathbf{H}\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{u}_i + \mathbf{b}\mathbf{k}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i + \mathbf{b}\mathbf{k}_i \quad \text{dla} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Równanie (2.3.10) wskazuje, że dla  $t \geq m+1$ ,  $\lambda_t$  i  $\mathbf{u}_t$  są takie same dla macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{H}$ . Z równania (2.3.11) wynika natomiast, że ani  $\lambda_i$  nie jest wartością własną macierzy  $\mathbf{H}$ , ani też  $\mathbf{u}_i$  — wektorem własnym tej macierzy, oczywiście przy spełnieniu warunku  $k_i \neq 0$ . Tak więc efektem wprowadzenia do układu sterowania w postaci (2.3.3) jest zmiana wartości własnych  $\{\lambda\}$  i odpowiadających im wektorów własnych  $\{\mathbf{u}\}$  na wartości i wektory własne, odpowiednio,  $\{\varrho\}$  i  $\{\mathbf{w}\}$ , przy zachowaniu pozostałych  $(n-m)$  wektorów i wartości własnych niezmienionych. Przy ustalonym zbiorze  $\{\varrho\}$  realizującym dane własności należy wyznaczyć współczynniki wzmocnienia  $k_i$ . W tym celu rozłożmy wektory  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{w}_i$  na kierunki wektorów własnych macierzy  $\mathbf{A}$  (np. [20]):

$$(2.3.12) \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{u}_j;$$

$$(2.3.13) \quad \mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Z (2.3.12) po wykorzystaniu (2.3.9) wynika, że

$$(2.3.14) \quad p_j = \mathbf{v}_j^T \mathbf{b}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ponieważ  $\mathbf{w}_i$  jest wektorem własnym macierzy  $\mathbf{H}$ , to

$$(2.3.15) \quad \mathbf{H}\mathbf{w}_i = \varrho_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Podstawiając (2.3.6) i (2.3.13) do (2.3.15) otrzymamy

$$(2.3.16) \quad \left( \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{l=1}^m k_l \mathbf{v}_l^T \right) \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j = \varrho_i \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Przekształcając na mocy (2.3.7), (2.3.9) i (2.3.12) lewą stronę wyrażenia (2.3.16) w następujący sposób:

$$\mathbf{A} \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^n q_{ij} \lambda_j \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\mathbf{b} \sum_{l=1}^m k_l \mathbf{v}_l^T \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{b} \sum_{l=1}^m k_l q_{il} = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{u}_j \sum_{l=1}^m k_l q_{il}, \quad i = 1, \dots, m,$$

otrzymujemy

$$(2.3.17) \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} \lambda_j \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{u}_j \sum_{l=1}^m k_l q_{il} = \varrho_i \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Równanie (2.3.17) jest równaniem wektorowym ze względu na  $\mathbf{u}_j$  i jest równoważne następującemu układowi równań skalarnych:

$$(\varrho_i - \lambda_j)q_{ij} - p_j \sum_{i=1}^m k_i q_{ii} = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n. \end{matrix}$$

Dla danego wskaźnika „ $i$ ” pierwszych  $m$  równań, które zmieniają wartości własne układu, można zapisać w formie macierzowej

$$\mathbf{F}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\mathbf{F}_i = [f_{jl}^{(i)}]; \quad \mathbf{q}_i = [q_{il}],$$

przy czym

$$f_{jl}^{(i)} = (\varrho_i - \lambda_j) \delta_{jl} - p_j k_l; \quad i, j, l = 1, \dots, m.$$

Ponieważ  $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{0}$ , to  $\det \mathbf{F}_i = 0$ .

Warunek ten można zapisać w formie rozwiniętej jako

$$\begin{vmatrix} (\varrho_i - \lambda_1) - p_1 k_1, & -p_1 k_2, \dots, & -p_1 k_m \\ -p_2 k_1, & (\varrho_i - \lambda_2) - p_2 k_2, \dots, & -p_2 k_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_m k_1, & -p_m k_2, \dots, & (\varrho_i - \lambda_m) - p_m k_m \end{vmatrix} = 0$$

lub w formie zwartej

$$(2.3.18) \quad \prod_{j=1}^m (\varrho_i - \lambda_j) = \sum_{l=1}^m k_l p_l \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m (\varrho_i - \lambda_j), \quad i = 1, \dots, m.$$

Z wyrażenia (2.3.18) wynika, że

$$(2.3.19) \quad \sum_{j=1}^m \frac{k_j p_j}{(\varrho_i - \lambda_j)} = 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Przy założeniu, że  $(\varrho_i - \lambda_j) \neq 0$  równanie (2.3.19) można rozwiązać ze względu na  $k_i$

$$(2.3.20) \quad k_i = \frac{\prod_{j=1}^m (\varrho_j - \lambda_i)}{p_i \prod_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Tak więc współczynniki wzmocnienia  $k_i$  mogą być obliczone, jeżeli  $\lambda_j \neq \lambda_i$ , co zawsze jest spełnione, gdyż zakładaliśmy, że macierz stanu ma pojedyncze wartości własne oraz jeżeli  $p_i \neq 0$ , co na mocy (2.3.14) można zapisać jako

$$(2.3.21) \quad \mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

Warunek ten jest równoznaczny z żądaniem sterowalności pierwszych  $m$  postaci układu. O postaciach niesterowalnych informują współrzędne zerowe wektora  $\mathbf{p}$  (zob. zakończenie

p. 2.2). Należy podkreślić, że badanie sterowalności układu metodą modalną jest daleko prostsze od metody klasycznej, polegającej na badaniu rzędu odpowiedniej macierzy.

Sterowanie otrzymamy po podstawieniu (2.3.20) do (2.3.3) i po uwzględnieniu założenia, że  $\mu_i = \nu_i$  [por. (2.3.5) i (2.3.6)].

$$(2.3.22) \quad u(t) = \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t),$$

gdzie

$$(2.3.23) \quad \mathbf{g} = \sum_{i=1}^m \nu_i k_i.$$

Należy zauważyć, że dla układu fizycznego sterowanie (2.3.22) będzie rzeczywiste nawet w przypadku występowania wartości własnych zespolonych. Wynika to z tego, że jeżeli  $\lambda_j = \lambda_i^*$ , to  $p_j = p_i^*$  i  $\nu_j = \nu_i^*$ , co jest konsekwencją występowania zespolonych wartości własnych w parach wzajemnie sprzężonych.

W celu wyznaczenia sterowania należy więc wykonać następujące kroki obliczeniowe:

1. na podstawie warunku (2.3.21) wyznaczyć sterowalne i niesterowalne postacie układu;

2. ze wzoru (2.3.20) wyznaczyć współczynniki wzmocnienia  $k_i$ ;

3. ze wzoru (2.3.23) wyznaczyć wektor wzmocnienia  $\mathbf{g}$  i tym samym sterowanie (2.3.22).

Podany algorytm pozwala na efektywne wyznaczanie sterowania, co zostanie w p. 3 zilustrowane przykładem.

**Układ wielowejściowy.** Zadanie polega obecnie na wyznaczeniu współczynników wzmocnienia  $k_{ij}$ , w których  $i = 1, \dots, m$  jest wskaźnikiem liczby zmienianych wartości własnych, a  $j = 1, \dots, n$  jest wskaźnikiem liczby wejść.

Ponieważ wszystkie zależności dla układu wielowejściowego ( $r > 1$ ) wyprowadza się analogicznie, jak dla układu jednowejściowego ( $r = 1$ ), przedstawimy więc tylko najważniejsze wyniki. Dla porównania zachowujemy numerację wzorów z poprzedniego punktu dodając prim. Równanie sterowania układu wielowejściowego ma postać

$$(2.3.4)' \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \left( \mathbf{A} + \sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \sum_{i=1}^m k_{ji} \nu_i^T \right) \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t).$$

Współczynniki wzmocnienia są wyznaczone z warunku

$$\begin{vmatrix} (\varrho_i - \lambda_1) - \sum_{j=1}^r p_{j1} k_{j1}, & - \sum_{j=1}^r p_{j1} k_{j2}, \dots, & - \sum_{j=1}^r p_{j1} k_{jm} \\ - \sum_{j=1}^r p_{j2} k_{j1}, & (\varrho_i - \lambda_2) - \sum_{j=1}^r p_{j2} k_{j2}, \dots, & - \sum_{j=1}^r p_{j2} k_{jm} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - \sum_{j=1}^r p_{jm} k_{j1}, & - \sum_{j=1}^r p_{jm} k_{j2}, \dots, & (\varrho_i - \lambda_m) - \sum_{j=1}^r p_{jm} k_{jm} \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązanie tego równania jest niejednoznaczne [2] i otrzymuje się je przy ustalonym  $j$ -tym wejściu

$$(2.3.20)' \quad k_{jt} = \frac{\prod_{l=1}^m (\varrho_l - \lambda_i)}{p_{ji} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m (\lambda_l - \lambda_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sterowanie ma postać

$$(2.3.22)' \quad u_j(t) = \mathbf{g}_j^T \mathbf{x}(t),$$

gdzie

$$(2.3.23)' \quad \mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^m v_i k_{ij}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Wzór (2.3.20)' wskazuje, że współczynniki wzmocnienia mogą być obliczone, jeżeli  $p_{ji} \neq 0$  i oczywiście przy zachowaniu założenia o różnych wartościach własnych. Oznacza to, że  $i$ -ta postać może być sterowana  $j$ -tym wejściem. Współczynniki  $p_{ji}$  są elementami macierzy sterowalności modalnej  $\mathbf{P}$  o postaci

$$(2.3.21)' \quad \mathbf{P} = \mathbf{V}^T \mathbf{B}.$$

W celu wyznaczenia sterowania dla układu wielowejsciowego należy przeprowadzić obliczenia zgodne z algorytmem dla układu jednowejsciowego, kolejno  $j$ -razy dla każdego wejścia. Wyznaczenie wektora sterowania składać się będzie zatem z  $j$ -etapów iteracyjnych. Na każdym etapie obliczeń zachodzi konieczność wyznaczenia sterowania, macierzy sterowalności modalnej i macierzy stanu. Określone są one następującymi wzorami:

sterowanie

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^m k_i^{(j)} v_i^{(j)T} \mathbf{x}(t);$$

macierz sterowalności modalnej

$$\mathbf{P}^{(j)} = \mathbf{V}^{(j)T} \mathbf{B}^{(j)};$$

macierz stanu

$$\mathbf{H}^{(j+1)} = \mathbf{H}^{(j)} + \mathbf{b}_j \mathbf{g}_j^T, \quad j = 1, \dots, r-1,$$

przy czym  $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A}$ .

W przypadku  $r > 1$  sterowanie jest niejednoznaczne. Pozwala to na zastosowanie dodatkowego kryterium przy jego wyznaczaniu. Może nim być np. kryterium minimalizacji sumy modułów wzmocnień w gałęziach sprzężenia zwrotnego.

**2.4. Przypadek wartości własnych wielokrotnych [8].** Rozważymy tylko układ jednowejsciowy. Rozważania będą podobne do tych, które przeprowadzono dla przypadku z p. 2.3. Do wyznaczenia sterowania potrzebna jest postać kanoniczna Jordana macierzy stanu, która istnieje (zob. [20]) dla każdej macierzy kwadratowej. Wykorzystując podane na początku pracy oznaczenia można napisać, że

$$\mathbf{UAV} = \mathbf{J},$$



gdzie

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbf{J}_{n_r}(\lambda_r).$$

Symbol  $\oplus$  oznacza sumę prostą macierzy.

Blok Jordana ma postać

$$\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

przy założeniu, że każdy z nich zawiera inną postać własną, tzn.  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = 1, \dots, \nu$ .

Macierze  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  mogą być przedstawione w postaci

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_\nu],$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_\nu],$$

co eksponuje ich zależność od  $\nu$  — różnych wartości własnych. Podmacierze  $\mathbf{U}_i$  i  $\mathbf{V}_i$  o wymiarach  $n \times n$  mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i &= [\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{n_i}^{(i)}], \\ \mathbf{V}_i &= [\mathbf{v}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{v}_{n_i}^{(i)}], \end{aligned} \quad i = 1, \dots, \nu,$$

z której wynika ich zależność od krotności  $i$ -tej wartości własnej. Analogiczne zależności można otrzymać dla macierzy sterowalności modalnej

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} = [\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(\nu)}],$$

gdzie

$$\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{V}_i^T \mathbf{b} = [p_1^{(i)}, \dots, p_{n_i}^{(i)}], \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Wektor sterowania  $\mathbf{b}$  może być przedstawiony w postaci

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_i} p_j^{(i)} \mathbf{u}_{n_j}^{(i)}.$$

Przy założeniu, że  $p_{m_i}^{(i)} \neq 0$  i  $p_j^{(i)} = 0, j = m_i + 1, \dots, n_i$ , co oznacza, że podmacierz sterowalności modalnej ma postać

$$\mathbf{p}^{(i)T} = [p_1^{(i)}, \dots, p_{m_i}^{(i)}, 0, \dots, 0],$$

wektor sterowania można zapisać jako

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} p_j^{(i)} \mathbf{u}_j^{(i)}.$$

Po uwzględnieniu tych założeń sterowanie przyjmuje postać

$$(2.4.1) \quad u(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} k_j^{(i)} \mathbf{v}_j^{(i)T} \mathbf{x}(t).$$

Układ zamknięty jest opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left( \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} k_j^{(i)} \mathbf{v}_j^{(i)T} \right) \mathbf{x}(t),$$

z którego wynika, że macierz układu sterowanego dana jest wzorem

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{b} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_i} k_j^{(i)} \mathbf{v}_j^{(i)T}.$$

Analogicznie jak w p. 2. 3 można wykazać, że wartości i wektory własne macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{H}$  są takie same w przypadku, gdy  $m_i + 1 \leq j \leq n_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ . Dla  $j = 1, \dots, m_i$  wartości i wektory własne ulegają zmianie. Mając dany zbiór nowych wartości własnych, należy wyznaczyć wartości współczynników wzmocnienia  $k$ , co sprowadza się do rozwiązania równania

$$F^{(ij)} \mathbf{q}_j^{(i)} = 0.$$

Rozwiązując je ze względu na  $k$ , przy ustalonej wartości wskaźników  $i, j$ , otrzymamy

$$(2.4.2) \quad R^{(ij)} \mathbf{P} \mathbf{K} = 1, \quad i = 1, \dots, \nu; \quad j = 1, \dots, m_i,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R^{(ij)} &= [R_1^{(ij)}, \dots, R_\nu^{(ij)}], \\ \mathbf{P} &= P_1 \oplus \dots \oplus P_\nu, \\ \mathbf{K} &= [K_1, \dots, K_\nu], \\ R_k^{(ij)} &= \left[ \frac{1}{(\rho_j^{(i)} - \lambda_k)^1}, \dots, \frac{1}{(\rho_j^{(i)} - \lambda_k)^{m_k}} \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ macierze  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{K}$  są niezależne od wskaźników  $i, j$  równanie (2.4.2) można zapisać w postaci

$$\mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{K} = \mathbf{e}.$$

Z równania tego wyznacza się współczynniki wzmocnienia

$$(2.4.3) \quad \mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}.$$

Sterowanie otrzymamy podstawiając (2.4.3) do (2.4.2).

### 3. Przykład

W ostatnich latach coraz częściej prowadzone są prace nad wyposażeniem śmigłowców w układy stabilizacji automatycznej z powodu niewystarczającej stabilizacji własnej.

Wykorzystując wyniki rozważań z p. 2.3 znajdziemy schemat ideowy urządzenia sterującego dla ustateczniania wybranych postaci ruchu śmigłowca. Ze względu na przejrzystość postępowania ograniczymy się przy tym do przypadku lotu w płaszczyźnie pionowej. Dla tego przypadku równanie ruchu śmigłowca ma postać

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

gdzie

$$\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [u/\Omega R, w/\Omega R, q, \Theta]^T,$$

$$\mathbf{u}(t) = [u_1, u_2]^T = [U_c, U_p]^T.$$

W przypadku ogólnym śmigłowiec ma sześć stopni swobody. Ponieważ jednak w locie normalnym ruchy przechylające i pochyłające śmigłowca związane są z jego prędkościami boczną i wzdłużną, to dzięki temu śmigłowiec ma tylko cztery organa sterowania.

Rozpatrując stateczność śmigłowca w locie do przodu można pokazać, że sprzężenie pomiędzy ruchami wzdłużnym i bocznym jest słabe. Daje to podstawę do nieuwzględniania równania ruchu bocznego i dzięki temu ilość równań ruchu zmniejsza się do czterech. W locie w płaszczyźnie pionowej mamy dwie możliwości sterowania, mianowicie  $U_c$  — sterowanie skokiem ogólnym łopaty wirnika nośnego, będące bezpośrednim sterowaniem siłą nośną,  $U_p$  — sterowanie skokiem cyklicznym łopaty wirnika nośnego, oddziałujące na ruch wzdłużny.

Dla typowego obciążenia i typowych warunków lotu śmigłowca macierze  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  są podane w [21]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4556 \\ 0,0482 & -1,01 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,3681 & -0,707 & 1,420 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,5446 & -7,5922 \\ -5,52 & 4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  są następujące:  $\lambda_1 = -1,6886$ ;  $\lambda_2 = -0,9073$ ;  $\lambda_3 = 0,8325$ ;  $\lambda_4 = 0,0098$ , a odpowiadające tym wartościom wektory własne macierzy  $\mathbf{A}^T$  mają postać:

$$\mathbf{v}_1 = [-0,0603, 0,1341, 0,0758, 1]^T;$$

$$\mathbf{v}_2 = [-0,0529, -0,3261, 0,0141, 0,0426]^T;$$

$$\mathbf{v}_3 = [0,0758, 0,0141, 0,6505, 1]^T;$$

$$\mathbf{v}_4 = [1, 0,0426, 0,4434, 0,299]^T.$$

Zbiór wartości własnych macierzy stanu wskazuje, że przy danych warunkach lotu w układzie występują dwie niestateczne postacie ruchu odpowiadające wartościom  $\lambda_3$  i  $\lambda_4$ . Kierując się kryterium stateczności żądamy, aby obie wartości były również ujemne. Tak więc zbiór  $\{e\}$  wartości własnych układu zamkniętego ma postać

$$\{e\} = \{-1,6886, -0,9073, -0,11, -0,907\}.$$

Jak wiadomo (por. [7, 22, 23]), śmigłowiec może być sterowany niezależnie wielkościami  $U_c$  i  $U_p$ . Pozwala to na traktowanie układu jako jednowejściowego. Wyznamy sterowanie realizujące kryterium stateczności dla obu przypadków sterowania. Jest to możliwe, ponieważ wektory sterowalności modalnej równe

$$\text{dla } U_c: \mathbf{p}_c = [-5,8206, 4,4157, -3,5375, -2,2525]^T$$

$$\text{dla } U_p: \mathbf{p}_p = [-7,9827, 6,1932, -4,8742, -3,1577]^T$$

nie zawierają elementów zerowych.

Wykorzystując procedurę dla układu jednowejściowego otrzymujemy prawa sterowania w postaci

$$U_c(t) = -0,0166 u/\Omega R + 0,0054 w/\Omega R + 0,3402 q + 0,5457 \theta,$$

$$U_p(t) = -0,0113 u/\Omega R + 0,0040 w/\Omega R + 0,2472 q + 0,3962 \theta.$$

Wszystkie obliczenia zostały przeprowadzone na EMC Cyber-72 według programów własnych w języku Fortran IV.

Warto podkreślić, że ten sam efekt ustatecznienia osiągnie się wykorzystując jednocześnie oba wektory sterowania przy założeniu, że każdy z nich steruje jedną i nie tą samą wartością własną. W tym przypadku sterowanie może być wyznaczone bez użycia procedury dla układu wielowejściowego.

#### 4. Zakończenie

Z rozwiązania przykładu można się przekonać o dużej prostocie i efektywności zastosowanego algorytmu. Trzeba jednak pamiętać, że przyjęte kryterium ustatecznienia jest jednym z możliwych przy doborze zbioru wartości własnych układu zamkniętego. Istnieją także inne, równie ważne kryteria, np. szybkość tłumienia drgań własnych układu (mierzona czasem zmniejszania amplitudy do połowy).

Warto podkreślić, że stosowalność przedstawionych algorytmów nie jest ograniczona ani liczbą stopni swobody układu, ani liczbą zmienianych postaci własnych, a niejednoznaczność rozwiązania dla układów wielowejściowych można nawet dodatkowo wykorzystać, postulując np. minimalizację wymiaru wektora wzmocnienia.

Na specjalną uwagę zasługuje fakt, że zaproponowane algorytmy złożone są z prostych działań algebraicznych. Jest to szczególnie korzystne dla maszynowej techniki obliczeniowej, ponieważ różnorodność operacji znacznie zwiększa czas realizacji obliczeń. Fakt ten nabiera istotnego znaczenia zwłaszcza przy rozpatrywaniu większej liczby stanów lotu śmigłowca albo przy zmienianiu dużej liczby wartości własnych.

Sterowanie modalne przedstawione w tej pracy jest ogólne, ponieważ nie zakłada się szczególnej postaci macierzy wzmocnienia występującej w równaniu sterowania  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t)$ . Dzięki temu ułożone algorytmy mogą znaleźć szerokie zastosowanie nie tylko w technice lotniczej. Jeśli do ilustracji rozważań wybrano jednak przykład z tej dziedziny, to dlatego, że zagadnienie ustatecznienia lotu śmigłowca nie jest u nas zbadane w stopniu wystarczającym. Rozwiązanie zagadnienia tego typu wskazało na duże możliwości sterowania modalnego w tym zakresie. Oczywiście praktyczna realizacja urządzenia sterującego według wyznaczonego w niniejszej pracy schematu ideowego wymagałaby uwzględnienia

wszystkich niestatecznych stanów lotu śmigłowca. Rozpatrzenie tego przypadku nie stanowi jednak trudności przy zastosowaniu omówionej metody.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. K. ELLIS, G. T. WHITE, *An introduction to modal analysis and control*, Control, 4, 9 (1965), 193, 262, 317.
2. J. D. SIMON, S. K., MITTER, *A theory of modal control*, Inf. Control, 4, 13 (1968), 316.
3. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of aircraft modal control systems*, Aeronaut. J., 8, 73 (1968), 697.
4. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of aircraft modal control systems having real or complex eigenvalues*, Aeronaut. J., 2, 73 (1969), 138.
5. L. A. GOULD, A. T. MURPHY, E. F. BERKMAN, *On the Simon-Mitter allocation algorithm-explicit gains for repeated eigenvalues*, IEEE Trans. Autom. Control, AC-15 (1970), 259.
6. A. GOSIEWSKI, J. KORONACKI, *O metodzie syntezy układów sterowania opartej o wartości własne*, AAT, 1, 15 (1970), 17.
7. T. R. CROSSLEY, B. PORTER, *Synthesis of helicopter stabilization systems using modal control theory*, J. Aircraft, 1, 9 (1972), 3.
8. B. PORTER, T. R. CROSSLEY, *Modal Control-Theory and Application*, Taylor and Francis, London 1972.
9. Т. П. ГРИГОРЕВА, Л. У. КОЖИНСКАЯ, *К теории модального управления*, АиТ., 5(1973).
10. W. JAŻDŻYŃSKI, J. KOWAL, *Sterowanie modalne*, Teoria sterowania, cz. IV, Referaty doktorantów wygłoszone na seminarium H. Góreckiego w ramach studium doktoranckiego w zakresie automatyki i elektrotechniki w latach 1971 - 1973, AGH, Kraków 1974.
11. B. PORTER, A. BRADSHAW, *Modal control of class of distributed-parameter systems*, Int. J. Control, 4, 15 (1972), 673.
12. A. NIEDERLIŃSKI, *Układy wielowymiarowe automatyki*, WNT, Warszawa 1974.
13. J. O. FLOWER, *Linear feedback design using matrix traces*, Int. J. Control, 6, 21, (1975), 911.
14. A. BRADSHAW, B. PORTER, *Modal control of a class of distributed-parameter systems multi-eigenvalues assignment*, Int. J. Control, 2, 16 (1972), 277.
15. P. N. PARASKEVOPOULOS, S. G. TZAFESTAS, *New results in feedback modal-controller design*, Int. J. Control, 6, 21 (1975), 911.
16. T. KACZOREK, *Synteza liniowych układów stacjonarnych metodą przestrzeni stanów*, PWN, Warszawa 1975.
17. H. H. ROSENBRÖCK, *Distinctive problems of process control*, Chem. Engng. Prog., 9, 58 (1962), 43.
18. Encyklopedia Techniki, tom *Automatyka*, WNT, Warszawa 1972.
19. K. OGATA, *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa 1974.
20. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц*, Наука, Москва 1966.
21. K. S. NARENDA, S. TRIPATHI, *Identification and optimization of aircraft dynamics*, J. Aircraft, 10 (1973), 193.
22. P. R. PAYNE, *Helicopter Dynamics and Aerodynamics*, Pitman, London 1959.
23. А. Н. ЗАГОРДАН, *Элементарная теория вертолёта*, Мин. Обр. СССР, Москва 1960.

#### Резюме

#### МЕТОД МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛЕТА ВЕРТОЛЕТА

В работе представлена теория модального управления системами с одним или несколькими входами при сосредоточенных параметрах, в постановке Портера и Кроссли. С помощью этого метода решена задача стабилизации полета вертолета.

## S u m m a r y

MODAL CONTROL METHOD AND ITS APPLICATION TO THE STABILIZATION  
OF HELICOPTER FLIGHT

In this paper a theory of modal control of lumped-parameter systems for single- and multi-input systems derived by Porter and Crossley is presented. The stabilization problem of the flight of helicopter by this method is solved.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1976 r.*

---