

KINEMATYCZNA ANALIZA PRZEPŁYWÓW CIECZY NIELINIOWO LEPKOSPĘŻYSTYCH

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W chwili obecnej rozwój reologii nienewtonowskich cieczy lepkospężystych odbywa się w kilku kierunkach opierających się na trzech podstawowych podejściach: 1) empirycznym, 2) asymptotycznym i 3) kinematycznym.

W najstarszym historycznie podejściu empirycznym zasadnicze znaczenie posiada zgodność postulowanych równań konstytutywnych z zachowaniem się cieczy rzeczywistych. Ograniczony charakter klasycznego modelu cieczy Newtona oraz dążenie do ilościowego ujęcia takich zjawisk, jak zmienna lepkość cieczy przy różnych szybkościach przepływu, efekty relaksacyjne i efekty naprężeń normalnych, przepływy wtórne w rurach o przekrojach niekołowych itp., doprowadziły do olbrzymiej ilości różnych modeli empirycznych stosowanych przez różnych autorów (por. np. [1, 2, 3, 4]). Niewątpliwą zaletą podejścia empirycznego jest możliwość uzyskania stosunkowo prostych równań pozwalających na efektywne rozwiązania wielu zagadnień praktycznych. Zasadniczą jego wadą jest brak jakichkolwiek gwarancji, że równania empiryczne dobrze opisujące własności cieczy w pewnych szczególnych przepływach okażą się wystarczająco dobre dla innych przepływów.

Podejście asymptotyczne, oparte na teoretycznych podstawach mechaniki ośrodków ciągłych, pozwala na uzyskanie uproszczonych równań konstytutywnych dla przepływów wystarczająco powolnych, opóźnionych, z małymi deformacjami, małymi częstotliwościami itp. Dzięki podstawowym dziś pracom RIVLINA, GREENA, COLEMANA, NOLLA, TRUESDELLA i innych badaczy (por. [5, 6, 7, 8, 9]), ten sposób doprowadził do sformułowania matematycznej teorii rozwinięć asymptotycznych oraz do rozwiązania wielu interesujących zagadnień. Poważną wadą asymptotycznego podejścia są dość silne założenia ograniczające, co prowadzi do zadowalających wyników tylko przy ścisłym spełnieniu tych założeń. W większości wypadków konieczna jest również znajomość rozwiązań odpowiednich zagadnień opisywanych równaniami Naviera-Stokesa (por. [5, 10]).

Dla ilustracji posłużymy się przykładem nieściśliwej cieczy rzędu drugiego (por. [5]), której równanie konstytutywne dość dobrze opisuje stosunkowo powolne przepływy cieczy lepkospężystych z małymi czasami charakterystycznymi (naturalnymi). Równanie to przybiera postać (por. np. [10])

$$(1.1) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \eta_0 \mathbf{A}_1 - \eta_0 \theta \mathbf{A}_2 + \eta_0 (\theta + \theta^*) \mathbf{A}_1^2, \quad \text{tr} \mathbf{A}_1 = 0,$$

gdzie $\mathbf{T}(t)$ jest tensorem naprężenia, p — ciśnieniem hydrostatycznym, zaś $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) oznaczają kinematyczne tensory Rivlina-Ericksena (por. [6, 5]) zdefiniowane następująco:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T, \\ \mathbf{A}_{n+1} &= \dot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{A}_n \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{A}_n, \end{aligned}$$

przy czym $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest polem prędkości, zaś kropką oznaczono materialną pochodną względem czasu. Stała materiałowa η_0 posiada wymiar lepkości, a stałe θ i θ^* — wymiar czasu (θ — charakterystyczny czas cieczy). W założeniu, że przepływ jest przepływem pełzającym (quasi-statycznym), dla którego pole prędkości i ciśnienie mogą być przedstawione w postaci: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots$, $p = p_1 + p_2 + \dots$, gdzie jedynką oznaczono odpowiednie wielkości dla cieczy newtonowskiej, równania równowagi prowadzą do zależności (por. [11]):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla p_1 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_1 &= 0, \\ \nabla p_2 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_2 &= -\eta_0 \theta \operatorname{div}(\mathbf{A}_2(\mathbf{v}_1) - \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_1) + \eta_0 \theta^* \operatorname{div} \mathbf{A}_1^2(\mathbf{v}_1)), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pierwsze z powyższych równań jest równaniem Naviera-Stokesa dla przepływu quasi-statycznego, drugie posiada identyczną strukturę, a jego prawa strona zależy wyłącznie od $\mathbf{v}_1$, tj. od prędkości odpowiadającej rozwiązaniu zagadnienia brzegowego dla cieczy newtonowskiej. PIPKIN [10] przedyskutował przypadki, w których prawa strona (1.3)₂ jest pewnym polem bezwirowym.

Powyższy przykład dobrze ilustruje rolę, jaką znajomość rozwiązań równań Naviera-Stokesa odgrywa przy stosowaniu metody kolejnych przybliżeń dla nieściślej cieczy rzędu drugiego, której model jest rozwinięciem asymptotycznym równań konstytutywnych cieczy prostej (por. [5, 9]).

Podejście kinematyczne, zgodne z odpowiednią klasyfikacją przepływów (por. [5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]), pozwala na wyprowadzenie uproszczonych równań konstytutywnych przy założeniu szczególnych historii deformacji, geometrii przepływów itp. W literaturze można spotkać różne sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów (por. TRUESDELL, NOLL [5] TANNER [12], LODGE [14], LODGE i WALTERS [15]); w dalszych rozważaniach będziemy postępować zgodnie ze schematem zaproponowanym przez NOLLA [19] i rozwiniętym w pracach autora [16, 17, 18]. Zalecą takiego podejścia jest możliwość uzyskania ogólnych dla danej klasy przepływów równań konstytutywnych oraz możliwość bezpośrednich porównań między różnymi przepływami należącymi do tej samej klasy. Jednakże kinematyczna analiza przepływów często prowadzi do zbyt złożonych równań, zawierających większą liczbę funkcji lub stałych materiałowych.

W niniejszym przeglądzie omawiamy krótko różne sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów, a następnie przechodzimy do przedyskutowania przepływów wiskozymetrycznych (PW), ruchów ze stałą historią deformacji (RSHD) i ruchów z proporcjonalną historią deformacji (RPHD). Dalszymi uogólnieniami będą ruchy z nałożonymi proporcjonalnymi historiami deformacji (RNPHD), a w szczególności przepływy złożone z ustalonego przepływu podstawowego (wiskozymetrycznego lub rozciągającego) i małych dodatkowych zaburzeń o charakterze oscylacyjnym.

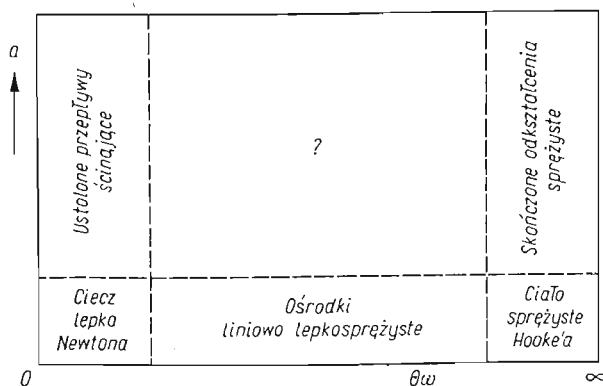
2. Różne sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów

Rozwój mechaniki ośrodków ciągłych, a w szczególności nieliniowych cieczy lepko-sprężystych, doprowadził do stwierdzenia, że tylko określone własności cieczy odgrywają istotną rolę w przepływach charakteryzujących się szczególnym typem historii kinema-

tycznej (por. TRUESDELL, NOLL [5], PIPKIN [10], ASTARITA, DENN [13]). Innymi słowy, ilość informacji o własnościach danej, nawet bardzo ogólnej, cieczy jest ograniczona i zależy wyłącznie od tego do jakiej klasy kinematycznej należy rozważany przepływ. W tym też sensie niektóre równania konstytutywne (np. nieściśliwej cieczy rzędu drugiego) otrzymane za pomocą metod asymptotycznych zachowują swoją ważność dla określonych klas przepływów (por. [5]).

Stosowane przez niektórych autorów sposoby kinematycznej klasyfikacji przepływów są różne, a nawet nie zawsze prowadzą do rozłącznego podziału przepływów. O wyborze takiego lub innego sposobu podziału może decydować matematyczna prostota równań, możliwość wykorzystania równań obowiązujących w ramach tej samej klasy do opisu różnych przepływów, a nawet znaczenie danej klasy przepływów w zastosowaniach praktycznych. Rozważmy kilka spotykanych w literaturze sposobów klasyfikacji przepływów.

Zgodnie z propozycją PIPKINA [10], wszystkie ścinające przepływy cieczy lepkosprężystych można rozważać na następującym schemacie (rys. 1). Na osi odciętych odклада się



Rys. 1

iloczyn charakterystycznego czasu cieczy θ (np. średniego czasu relaksacji) przez częstość ω charakteryzującą przepływ, przy czym skala jest taka, że iloczyn ten zmienia się od zera do nieskończoności. Na osi rzędnych odmierza się bezwymiarową amplitudę deformacji a . Dla małych wartości $\theta\omega$ otrzymujemy ustalone przepływy ścinające (por. p. 3), a dla bardzo dużych $\theta\omega$ — skończone odkształcenia ośrodków sprężystych. Ponieważ małe amplitudy a odpowiadają liniowej lepkosprężystości, w lewym dolnym rogu schematu, tj. dla bardzo małych $\theta\omega$ i a , jest miejsce dla klasycznych lepkich cieczy Newtona. W prawym dolnym rogu, tj. dla bardzo dużych $\theta\omega$ i bardzo małych a , należy umieścić ośrodki liniowo sprężyste. Chociaż powyższy schemat dobrze ilustruje rolę, jaką parametry o wymiarze czasu, a ściślej stosunek czasu charakterystycznego cieczy θ do czasu ω^{-1} — charakteryzującego proces, odgrywają przy badaniu przepływów, niewiele potrafimy powiedzieć o środkowej części diagramu. Tutaj mieszczą się wszystkie przepływy, dla których istotne są lepkosprężyste własności cieczy, a deformacje wystarczająco duże.

Inną klasyfikację, opierającą się na wcześniejszych rozważaniach LODGE'A [2], proponuje TANNER [12], który dzieli przepływy na «silne» i «słabe». Przykładami tych klas

przepływów są proste przepływy rozciągające (PR) i ścinające, opisane następującymi polami prędkości:

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}G(2ix - jy - kz), \quad \mathbf{v} = \gamma iy,$$

przy czym G oznacza podłużny gradient rozciągania, a γ — poprzeczny gradient ścinania. Przymiotniki «silne» i «słabe» pochodzą od względnej zdolności danego przepływu do odkształcania mikrostruktury cieczy, co prowadzi do istotnie różnych pól naprężeń. Obliczenie separacji płaszczyzn znajdujących się początkowo blisko siebie pokazuje, że w przepływach rozciągających (silnych) mamy wykładniczą zależność od czasu (proporcjonalną do $\exp 2G(\tau - t)$), gdzie t oznacza aktualną chwilę czasu), a w przepływach ścinających (słabych) — co najwyżej algebraiczną (np. rzędu $\gamma^2(\tau - t)^2$). Wszystkie przepływy można w ten sposób zaliczyć albo do słabych, albo też do silnych. Na przykład, ruchy ze stałą historią deformacji (por. p. 4) należą do przepływów słabych (por. [12]).

Bardziej złożoną kinematyczną klasyfikację przepływów zaproponował niedawno LODGE [14] (por. także LODGE i WALTERS [15]), dzieląc wszystkie przepływy na «ścinające» i «rozciągające» (PR). W myśl jego definicji przepływ należy do klasy przepływów ścinających, jeśli: 1) każdy poruszający się element materialny zachowuje swoją objętość, 2) istnieje jednoparametrowa rodzina izometrycznych (nierozciągliwych) powierzchni materialnych, którą można związać z odpowiednim układem współrzędnych konwekcyjnych (deformujących się razem z ośrodkiem). Dalszy podział obejmuje definicje przepływów jednokierunkowych, ustalonych, niezależnych od czasu itp. Klasyfikacja LODGE'A pozwala łatwo stwierdzić, czy dany przepływ jest «zbliżony do wiskozymetrycznego» w sensie definicji PIPKINA i OWENA [20] oraz czy jego historia jest stała (por. p. 3). Na przykład przepływ w ortogonalnym reometrze MAXWELLA [21] charakteryzuje się stałą historią deformacji, podczas gdy przepływy w reometrze balansowym i reometrze z mimośrodowymi cylindrami nie wykazują tej własności (por. [15, 18]).

Klasyfikacja kinematyczna omawiana w dalszych punktach została zapoczątkowana pracami COLEMANA i NOLLA (por. [19, 22]), w których w sposób ogólny zdefiniowano przepływy wiskozymetryczne (PW), przepływy ze stałą historią deformacji (RSHD) i inne. Decydujące znaczenie przy takiej klasyfikacji posiada historia gradientu deformacji, a ściślej jego części odpowiedzialnej za czyste wydłużenie (bez efektów obrotu). Dla pewnych szczególnych historii deformacji, nawet ogólna ciecz prosta COLEMANA-NOLLA (por. [5]) o mniej lub bardziej złożonej «pamięci» niewiele ma do zapamiętania, a jej równanie konstytutywne upraszcza się istotnie.

Punktem wyjścia do dalszej analizy będzie równanie konstytutywne nieściśliwej cieczy prostej w postaci następującej:

$$(2.2) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \int_{s=0}^{\infty} \mathbf{\tilde{T}}(\mathbf{F}'_t(s)), \quad \det \mathbf{F}'_t(s) = 1,$$

gdzie $\mathbf{T}(t)$ jest tensorem naprężenia, p — ciśnieniem hydrostatycznym, a funkcjonal konstytutywny $\mathbf{\tilde{T}}$ spełnia warunek izotropii (por. [5])

$$(2.3) \quad \mathbf{R}(0) \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}'_t(s)) \mathbf{R}^T(0) = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{R}(s) \mathbf{F}'_t(s)) \mathbf{R}^T(0), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(s)|_{s=0},$$

dla każdego ortogonalnego $\mathbf{R}(s)$ i każdej historii gradientu względnej deformacji $\mathbf{F}'_t(s)$ rozumianej jako

$$(2.4) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{F}_t(t-s), \quad s \in [0, \infty),$$

przy czym gradient deformacji względem konfiguracji odniesienia w aktualnej chwili czasu t wynika z definicji

$$(2.5) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \xi(\tau) = \chi_t(\mathbf{x}, \tau),$$

gdzie $\chi_t(\mathbf{x}, \tau)$ określa ruch ośrodka. Pole prędkości wynika z zależności

$$(2.6) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{d\tau} \chi_t(\mathbf{x}, \tau)|_{\tau=t}.$$

Prawy tensor względnej deformacji (tensor Cauchy-Greena) (por. [5]) definiuje się następująco:

$$(2.7) \quad \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau), \quad \mathbf{C}_t(t) = \mathbf{F}_t(t) = \mathbf{1}.$$

3. Przepływy wiskozymetryczne

Bardzo obszerna i geometrycznie prosta klasa przepływów wiskozymetrycznych (oznaczanych dalej skrótem PW) najwcześniej zainteresowała badaczy z uwagi na jej znaczenie teoretyczne i liczne zastosowania w technologii, badaniach laboratoryjnych itp. (por. [5, 23]).

Dla ilustracji własności cieczy ujawniających się w ustalonych i nieustalonych PW, posłużymy się przykładem prostego przepływu ścinającego (por. [23]), dla którego pole prędkości i równania ruchu przyjmują w kartezjańskim układzie współrzędnych postać następującą:

$$(3.1) \quad v^x = \kappa y, \quad v^y = v^z = 0,$$

$$(3.2) \quad \xi(\tau) = x + \kappa y(\tau - t), \quad \eta(\tau) = y, \quad \zeta(\tau) = z,$$

gdzie κ jest stałą szybkością ścinania (gradientem ścinania), a współrzędne (ξ, η, ζ) wyznaczają położenie cząstki w dowolnym czasie $\tau < t$. Historia gradientu względnej deformacji (2.5) w postaci

$$(3.3) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{1} - s\mathbf{M}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $[\mathbf{M}]$ jest stałą macierzą, po wstawieniu do (2.2) i wykorzystaniu (2.3) prowadzi do zależności

$$(3.4) \quad \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \mathbf{h}(\mathbf{M}).$$

Funkcja $\mathbf{h}$ jest funkcją izotropową spełniającą warunek

$$(3.5) \quad \mathbf{Q}\mathbf{h}(\mathbf{M})\mathbf{Q}^T = \mathbf{h}(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T).$$

dla każdego ortogonalnego $\mathbf{Q}$. Wybierając $\mathbf{Q}$ w postaci

$$(3.6) \quad [\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

otrzymamy dla tensora naprężenia macierz następującą:

$$(3.7) \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & 0 \\ T^{21} & T^{22} & 0 \\ 0 & 0 & T^{33} \end{bmatrix}.$$

Powyższe wyniki są również prawdziwe dla każdego przepływu, w którym historia gradientu deformacji dla wybranej cząstki materialnej i chwili czasu ma postać (3.3) w pewnej ortonormalnej bazie $\mathbf{g}_i$. Dowodzi się (por. [5, 23]), że baza taka istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$. Przepływy spełniające powyższe warunki są przepływami lokalnie wiskozymetrycznymi.

Wprowadzając definicje trzech funkcji wiskozymetrycznych w sposób następujący:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \tau(\kappa) &= \kappa\eta(\kappa) = T^{12}, \\ \sigma_1(\kappa) &= T^{11} - T^{33}, \\ \sigma_2(\kappa) &= T^{22} - T^{33}, \end{aligned}$$

możemy równanie konstytutywne (3.4) sprowadzić do postaci

$$(3.9) \quad \mathbf{T}(t) = T^{33}\mathbf{1} + \tau(\kappa)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) + \sigma_1(\kappa)\mathbf{N}\mathbf{N}^T + \sigma_2(\kappa)\mathbf{N}^T\mathbf{N},$$

gdzie $\mathbf{N} = \kappa^{-1}\mathbf{M}$.

Z teorii przepływów wiskozymetrycznych (por. [5, 23]) wynika, że:

1) Wszystkie dotychczas podane zależności są słuszne dla zmiennej (obracającej się) bazy $\mathbf{g}_i$; zatem funkcje wiskozymetryczne są funkcjami materiałowymi niezależnymi od przyjętej bazy współrzędnych.

2) Funkcja naprężenia ścinającego $\tau(\kappa)$ i funkcje różnic naprężeń normalnych $\sigma_1(\kappa)$, $\sigma_2(\kappa)$ są odpowiednio nieparzystą i parzystymi funkcjami zmiennej κ .

3) Analogiczne rozważania są prawdziwe również dla przypadku, w którym tensor $\mathbf{M}$ (stały dla prostego ścinania), szybkość κ i baza $\mathbf{g}_i$ zależą od czasu aktualnego t .

Ustalony PW można zatem zdefiniować jako przepływ, dla którego

$$(3.10) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{1} - s\mathbf{M}), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{1},$$

przy czym $\mathbf{R}(s)$ jest tensorem ortogonalnym dla każdego $0 \leq s < \infty$, a tensor $\mathbf{M}$ w bazie $\mathbf{g}_i$ ma postać (3.3)₂.

Uogólniając powyższą definicję na przepływy nieustalone, można stwierdzić, że dla nieustalonego lokalnego PW

$$(3.11) \quad \mathbf{F}'_t(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{1} + g(s)\mathbf{M}(t)), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{1},$$

gdzie $g(s)$ jest funkcją s , zależną również od parametru t (por. (4.14)₂). Dany PW jest przepływem globalnie wiskozymetrycznym, jeśli zależność (3.11) jest spełniona wzdłuż

toru każdej cząstki materialnej. W tym przypadku zamiast funkcji (3.8) wprowadza się następujące funkcjonały materiałowe (por. [5]):

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \int_{s=0}^{\infty} (g(s)) &= T^{12}, \\ \int_{s=0}^{\infty} \dot{S}_1(g(s)) &= T^{11} - T^{33}, \\ \int_{s=0}^{\infty} \dot{S}_2(g(s)) &= T^{22} - T^{33}. \end{aligned}$$

Odpowiednie równanie konstytutywne przyjmuje postać podobną do (3.9), przy czym zamiast funkcji wiskozymetrycznych należy wstawić funkcjonały (3.12).

Klasa PW znajdująca szerokie zastosowanie w reometrii i przetwórstwie polimerów obejmuje liczne znane przepływy, jak przepływ Poiseuille'a i Couette'a, przepływy helikoidalne i skręcające, przepływ w reogoniometrze Weissenberga itp. Należy jednak pamiętać, że istnieją również inne ważne przepływy nie należące do klasy PW, jak np. przepływy rozciągające (PR), przepływy w zbieżnych kanałach i dyszach, przepływy w reometrach z mimośrodami itp. (por. [18]).

4. Przepływy ze stałą i proporcjonalną historią deformacji

Istotnym uogólnieniem klasy ustalonych PW są tzw. ruchy ze stałą historią deformacji (oznaczane dalej jako RSHD) zdefiniowane przez NOLLA [19] oraz COLEMANA [22]. Dla tych ruchów, podobnie jak dla ustalonych PW, historia deformacji otoczenia danej cząstki jest zawsze taka sama, z dokładnością do sztywnego obrotu.

W myśl definicji RSHD (por. [19, 16]) gradient deformacji względem konfiguracji odniesienia w dowolnie wybranej chwili 0 przybiera postać

$$(4.1) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp(\tau \mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1},$$

przy czym $\mathbf{M}$ jest stałym tensorem (zależnym co najwyżej od parametru t), zaś $\mathbf{Q}$ — dowolnym tensorem ortogonalnym (np. charakteryzującym obrót cząstki od chwili 0 do chwili aktualnej t).

Biorąc pod uwagę, że

$$(4.2) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{F}_0(t)$$

oraz wykorzystując (2.7), otrzymamy historię prawego tensora względnej deformacji w postaci następującej:

$$(4.3) \quad \mathbf{C}_t'(s) = \mathbf{F}_t'^T(s) \mathbf{F}_t'(s) = \exp(-s \mathbf{L}^T) \exp(-s \mathbf{L}),$$

gdzie $\mathbf{L}(t)$ jest obroconym tensorem parametrycznym (por. [24]) oraz

$$(4.4) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{M} \mathbf{Q}^T(t).$$

Tensor $\mathbf{L}$ jest gradientem pola prędkości w obracającym się układzie odniesienia i jego związek z gradientem przestrzennym $\bar{\mathbf{L}}_1$ jest następujący:

$$(4.5) \quad \bar{\mathbf{L}}_1(t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t).$$

Dowodzi się (por. [24, 18]), że wszystkie ustalone i jednorodne pola prędkości, dla których $\bar{L}_1 = \text{const}$, generują RSHD, przy czym $Q(\tau) \equiv \mathbf{1}$. Natomiast nie dla wszystkich RSHD odpowiednie pola prędkości są ustalone i jednorodne; warunek $\bar{L}_1 = \text{const}$ jest warunkiem wystarczającym, aby $\dot{\bar{L}}_1 = 0$.

Klasyfikację RSHD zdefiniowanych wzorem (4.1) można przeprowadzić zgodnie ze schematem NOLLA [19] (por. [18]). Otrzymujemy w ten sposób trzy podklasy, dla których:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \text{I} - \mathbf{M}^2 &= \mathbf{0}, \\ \text{II} - \mathbf{M}^2 &\neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^3 = \mathbf{0}, \\ \text{III} - \mathbf{M}^n &\neq \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Podklasa (I) obejmuje wszystkie ustalone PW, dla których zawsze $\mathbf{M}^2 = \mathbf{0}$ i definicja (4.1) staje się równoważna (3.10). Do podklasy (II) zalicza się tzw. *podwójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne* (por. HUILGOL [25]), powstałe ze złożenia niektórych pól prędkości dla zwykłych PW. Najbardziej interesującą wydaje się podklasa (III) obejmująca oprócz *potrójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych* (por. [25]), ustalone przepływy rozciągające (PR), przepływy w ortogonalnym reometrze Maxwella i inne (por. [18]). Warto również podkreślić, że przepływy powstające ze złożenia kilku PW mogą należeć do każdej z trzech wymienionych podklas. I tak np. złożenie przepływów Poiseuille'a i Couette'a daje wiskozymetryczny przepływ helikoidalny, podczas gdy złożenie dwóch prostopadłych przepływów ścinających prowadzi do przypadku czystego ścinania, równoważnego przepływowi rozciągającemu (PR) (por. [16, 25]).

Podstawienie (4.3) do równania konstytutywnego nieściśliwej cieczy prostej w postaci

$$(4.7) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathfrak{G} \left(\mathbf{C}_i^t(s) \right), \quad \det \mathbf{C}_i^t(s) = 1,$$

gdzie $\mathfrak{G}$ jest funkcjonalem izotropowym, prowadzi do zależności (por. [18]):

$$(4.8) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathbf{g}(\mathbf{L}), \quad \mathbf{Q}\mathbf{g}(\mathbf{L})\mathbf{Q}^T = \mathbf{g}(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T).$$

Twierdzenie o reprezentacji udowodnione przez WANGA [26] daje

$$(4.9) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3),$$

gdzie $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, 2, 3$) oznaczają trzy pierwsze tensory kinematyczne Rivlina-Ericksena [por. (1.2)]. Dla wielu interesujących przypadków, a w szczególności, gdy wartości własne tensora $\mathbf{A}_1$ są różne, funkcja $\mathbf{f}$ w (4.9) zależy tylko od argumentów $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$. Mamy wówczas (por. [6]):

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}(t) = & -p\mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \\ & + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2), \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, \dots, 8$) są funkcjami wspólnych niezmienników utworzonych z $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$.

Dla każdego RSHD ilość niezależnych funkcji materiałowych wynosi co najwyżej pięć. Na przykład dla prostego rozciągania (PR), dla którego $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2$, otrzymamy

$$(4.11) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \beta_1 (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1 + \beta_2 (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1^2.$$

Funkcje β_1 i β_2 wyrażają się w prosty sposób przez funkcje materiałowe α_i . Istnieje zatem możliwość wykorzystania równań konstytutywnych określonych dla niektórych przepływów podklasy (III) do opisu własności cieczy w innych przepływach należących do tej samej podklasy, np. w przepływach rozciągających (por. [17, 18]).

Dalszym uogólnieniem klasy RSHD są tzw. ruchy z proporcjonalną historią deformacji (por. ZAHORSKI [17]), oznaczane dalej jako RPHD. W założeniu, że w zależności podobnej do (4.1) wykładnik tensorowy odpowiedzialny za historię czystego odkształcenia jest proporcjonalny do pewnej gładkiej funkcji czasu $k(\tau)$, otrzymamy następującą definicję RPHD:

$$(4.12) \quad F_0(\tau) = Q(\tau) \exp(k(\tau)M), \quad Q(0) = 1, \quad k(0) = 0,$$

gdzie M jest stałym tensorem, a $Q(\tau)$ — tensorem ortogonalnym.

Postępując podobnie jak poprzednio, można wykazać, że dla RPHD (por. [17]):

$$(4.13) \quad C'_t(s) = F'_t{}^T(s) F'_t(s) = \exp(g(s)N^T) \exp(g(s)N),$$

gdzie

$$(4.14) \quad N(t) = Q(t)MQ^T(t), \quad g(s) = k(t-s) - k(t).$$

Wprowadzając pojęcie obroconego tensora parametrycznego (por. [24]), mianowicie

$$(4.15) \quad L(t) = Q(t)M\dot{k}(t)Q^T(t) = N(t)\dot{k}(t),$$

otrzymamy równoważną definicję RPHD:

$$(4.16) \quad C'_t(s) = \exp\left(\frac{g(s)}{\dot{k}(t)}L^T\right) \exp\left(\frac{g(s)}{\dot{k}(t)}L\right).$$

Tensor L jest również gradientem pola prędkości w obracającym się układzie odniesienia.

Podobnie jak dla RSHD można dowieść, że wszystkie jednorodnie w przestrzeni pola prędkości, dla których $\bar{L}_1(t) = N\dot{k}(t)$, gdzie $N = \text{const}$, generują RPHD, przy czym $Q(\tau) \equiv 1$ (por. [17]), jeśli tylko funkcja $\dot{k}(t)$ jest całkowalna. Także klasyfikację RPHD przeprowadza się podobnie [por. (4.6)]. O zaliczeniu przepływu do danej podklasy decyduje tensor M , N lub L . Podklasa (I) obejmuje wszystkie nieustalone PW z proporcjonalną historią w zdefiniowanym sensie. Ruchy złożone z dwóch lub trzech nieustalonych PW będą na ogół należeć do podklasy (II) i (III). Nieustalone przepływy rozciągające (PR) z proporcjonalną historią deformacji oraz pewne nieustalone przepływy w reometrach nowego typu (por. [18]) znajdą się w podklasie (III).

Podstawiając (4.13) lub (4.16) do równania konstytutywnego (4.7), otrzymamy

$$(4.17) \quad T(t) = -p1 + \sum_{s=0}^{\infty} (g(s); N) = -p1 + \sum_{s=0}^{\infty} (g(s); L),$$

przy czym funkcjonały $\mathfrak{H}$ lub $\mathfrak{R}$ są równocześnie funkcjami izotropowymi argumentów N lub L .

Twierdzenie o reprezentacji dla RPHD (ZAHORSKI [17]) rozróżnia trzy następujące przypadki: 1) A_1 ma trzy różne wartości własne, 2) A_1 ma tylko dwie równe wartości własne, 3) A_1 ma trzy identyczne wartości własne. Na podstawie tego twierdzenia równania konstytutywne przyjmują jedną z poniższych postaci:

$$(4.18) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathop{\mathfrak{L}}\limits_{s=0}^{\infty} (g(s); \mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t)),$$

$$(4.19) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \mathop{\mathfrak{M}}\limits_{s=0}^{\infty} (g(s); \mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \mathbf{A}_3(t)).$$

Funkcjonały $\mathfrak{L}$ lub $\mathfrak{M}$ są równocześnie izotropowymi funkcjami argumentów zapisanych po średniku. Dla równania (4.18) pozostaje w mocy rozwinięcie typu (4.10), z tym że odpowiednie α_i zależą od czasu aktualnego t oraz wspólnych niezmienników utworzonych z $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$. Jeśli funkcja $k(\tau)$ zawiera inne parametry przepływu, np. częstość drgań, to α_i zależą również od tych parametrów.

Jako ilustrację RPHD rozważmy nieustalony przepływ w ortogonalnym reometrze Maxwella (por. [21]). Ponieważ równanie typu (4.10) jest słuszne zarówno dla przepływu w reometrze Maxwella (podklasa III), jak i dla przepływu rozciągającego (PR), funkcje materiałowe lub ich kombinacje wyznaczone dla przepływu w reometrze mogą być wykorzystane w sposób przybliżony do wyznaczania lepkości podłużnej w przepływie rozciągającym z identyczną zależnością od czasu $k(\tau)$.

5. Przepływy z nałożonymi proporcjonalnymi historiami deformacji i przepływy złożone

W celu dalszego uogólnienia definicji (4.1) i (4.2) można założyć, że dla wielu przepływów złożonych gradient deformacji względem konfiguracji w chwili 0 przyjmuje postać (por. [17])

$$(5.1) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp \left(\sum_{i=1}^n k_i(\tau) \mathbf{M}_i \right), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1}, \quad k_i(0) = 0,$$

gdzie $\mathbf{M}_i (i = 1, \dots, n)$ oznaczają stałe tensory, $k_i(\tau)$ — dowolne gładkie funkcje czasu, zaś $\mathbf{Q}(\tau)$ — tensor ortogonalny. Dla tak zdefiniowanych ruchów z nałożonymi proporcjonalnymi historiami deformacji (oznaczanych skrótem RNPHD), przyjmujemy ponadto, że

$$(5.2) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \prod_{i=1}^n \exp(k_i(\tau) \mathbf{M}_i), \quad \mathbf{M}_i \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i,$$

tzn. że tensory $\mathbf{M}_i$ wzajemnie komutują.

Postępując podobnie jak poprzednio i oznaczając

$$(5.3) \quad g_i(s) = k_i(t-s) - k_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

otrzymamy

$$(5.4) \quad \mathbf{C}'_t(s) = \exp \left(\sum_{i=1}^n g_i(s) \mathbf{N}_i^T \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n g_i(s) \mathbf{N}_i \right)$$

lub

$$(5.5) \quad \mathbf{C}'_t(s) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i(s)}{\dot{k}_i(t)} \mathbf{L}_i^T \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{g_i(s)}{\dot{k}_i(t)} \mathbf{L}_i \right),$$

gdzie

$$(5.6) \quad \mathbf{N}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}_i\mathbf{Q}^T(t), \quad \mathbf{L}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}_i\dot{\mathbf{k}}_i(t)\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{N}_i\dot{\mathbf{k}}_i(t).$$

Podobnie jak dla RPHD, pola prędkości z gradientami w postaci $\bar{\mathbf{L}}_1 = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{k}}_i(t)\mathbf{N}_i$, gdzie $\mathbf{N}_i$ są stałymi komutującymi tensorami, a $\dot{\mathbf{k}}_i(t)$ — funkcjami całkowalnymi, zawsze generują przepływy należące do RNPHD. Klasyfikację tych przepływów można również przeprowadzić badając własności tensora $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{k}}_i(t)\mathbf{N}_i(t)$. Na przykład, dla ruchów złożonych z dwóch PW, dla których $\mathbf{L}'^2 = \mathbf{L}''^2 = \mathbf{0}$, przepływ określony przez $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}''$ należy do podklasy PW, wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$(5.7) \quad \mathbf{L}'\mathbf{L}'' = \mathbf{L}''\mathbf{L}' = \mathbf{0}.$$

Przykładem takiego przepływu jest przepływ helikoidalny, w którym prędkość kątowna i osiowa zależą w różny sposób od czasu.

Równania konstytutywne dla omawianej obecnie klasy RNPHD otrzymamy podstawiając np. (5.4) do równania (4.7). Mamy wówczas (por. [17])

$$(5.8) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{N}(g_i(s); \mathbf{N}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

przy czym

$$(5.9) \quad \mathbf{Q} \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{N}(g_i(s); \mathbf{N}_i) \mathbf{Q}^T = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\alpha_i g_i(s); \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{Q} \mathbf{N}_i \mathbf{Q}^T \right)$$

dla każdego ortogonalnego $\mathbf{Q}$ i wszystkich zbiorów rzeczywistych niezerowych α_i . Podobne równania obowiązują również dla tensorów $\mathbf{L}_i$.

Szczególnie interesujący, ze względu na liczne zastosowania, jest przypadek dwóch nałożonych ruchów, z których pierwszy (oznaczony wskaźnikiem 1) jest ruchem podstawowym, najczęściej ustalonym, a drugi (oznaczony wskaźnikiem 2) — ruchem dodatkowym nałożonym na ruch podstawowy. Wówczas

$$(5.10) \quad \mathbf{C}'_i(s) = \exp(g_1(s)\mathbf{N}_1^T)\mathbf{C}_2(s)\exp(g_1(s)\mathbf{N}_1),$$

gdzie

$$(5.11) \quad \mathbf{C}_2(s) = \exp(g_2(s)\mathbf{N}_2^T)\exp(g_2(s)\mathbf{N}_2).$$

Należy pamiętać, że dla przepływów izochorycznych

$$(5.12) \quad \det \mathbf{C}'_i(s) = \det \mathbf{C}_1(s) = \det \mathbf{C}_2(s) = 1, \quad \text{tr} \mathbf{N}_1 = \text{tr} \mathbf{N}_2 = 0.$$

Podstawiając (5.10) do (4.7) można pokazać (por. [27, 28]), że

$$(5.13) \quad \mathbf{T}(t) = -p\mathbf{1} + \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{R}(g_1(s), \mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1), \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}_2(s) - \mathbf{1},$$

przy czym $\mathfrak{R}$ jest funkcjonalem względem $g_1(s)$ i $\mathbf{G}(s)$ oraz izotropową funkcją argumentu $\mathbf{N}_1$.

Dla pewnych typów ruchów dodatkowych, mianowicie dla historii mało różniących się w sensie odpowiedniej normy, można uzyskać bardziej konkretną postać równania (5.13). Zgodnie z zasadą zanikającej pamięci (por. [5]), jeśli funkcjonal $\mathfrak{R}$ jest różniczo-

walny w sensie Frécheta względem $G(s)$ w sąsiedztwie zerowej historii, będąc jednocześnie ciągłym względem $g_1(s)$ i N_1 , to

$$(5.14) \quad \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s), G(s); N_1) = \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s), 0; N_1) + \delta_G \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s)|G(s); N_1) + o(\|G(s)\|^2),$$

gdzie $\delta_G \mathfrak{R}$ oznacza funkcjonal liniowy względem $G(s)$ oraz

$$(5.15) \quad \lim_{\|G\| \rightarrow 0} \frac{o(\|G(s)\|^2)}{\|G\|(s)^2} = 0, \quad \text{tr } \delta_G \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s)|G(s); N_1) = 0.$$

Funkcjonal liniowy względem $G(s)$ może być przedstawiony w postaci całki

$$(5.16) \quad \delta_G \mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s)|G(s); N_1) = \int_0^{\infty} \Phi(g_1(s); N_1) [G(s)] ds,$$

gdzie $\Phi[G(s)]$ oznacza transformację liniową.

Dalszy postęp w rozwinięciu równań (5.13), (5.16) uzyskuje się dla ustalonych wiskozymetrycznych lub rozciągających przepływów podstawowych. Wtedy funkcjonal $\mathfrak{R}_{s=0}^{\infty}(g_1(s), 0; N_1)$ sprowadza się do postaci zbliżonej do (3.9) lub (4.11). Możliwe jest również rozwinięcie wyrażenia podcałkowego w (5.16), przy czym współczynniki rozwinięcia są funkcjami zarówno s , jak i $\kappa^2 = \text{tr} N_1^T N_1$ (por. [27]).

Często ruchy dodatkowe charakteryzujące się małymi deformacjami występują w postaci okresowo oscylujących zaburzeń nałożonych na ustalone przepływy podstawowe. Można wówczas rozważać dwa rodzaje zagadnień: 1) wpływ szybkości odkształcenia przepływu podstawowego na dynamiczne charakterystyki (lepkości, moduły, podatności itp.) cieczy w przepływie zaburzonym, 2) wpływ częstości, amplitudy itp. zaburzeń na parametry ustalonego przepływu podstawowego. Z punktu widzenia geometrii przepływu, zaburzenia mogą występować w kierunku równoległym i prostopadłym do kierunku przepływu podstawowego.

Na przykład, lepkości dynamiczne cieczy w zaburzonych przepływach ścinających są z reguły mniejsze niż odpowiednia lepkość $\eta(0)$ dla przepływu ustalonego przy zerowej szybkości ścinania. Dla bardzo małych częstości otrzymuje się następujące wartości graniczne (por. [27, 28]):

$$(5.17) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{||}(\kappa, \omega) = \frac{d\tau(\kappa)}{d\kappa} = \eta(\kappa) \left(1 + \frac{d \ln \eta}{d \ln \kappa} \right)$$

przy zaburzeniach równoległych oraz

$$(5.18) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{\perp}(\kappa, \omega) = \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} = \eta(\kappa)$$

przy zaburzeniach prostopadłych. $\tau(\kappa)$ jest wiskozymetryczną funkcją naprężenia ścinającego, a $\eta(\kappa)$ — funkcją lepkości dla przepływu ustalonego. Podobne zależności obowiązują również dla modułów dynamicznych i wielkości charakteryzujących naprężenia normalne (por. [28, 29]).

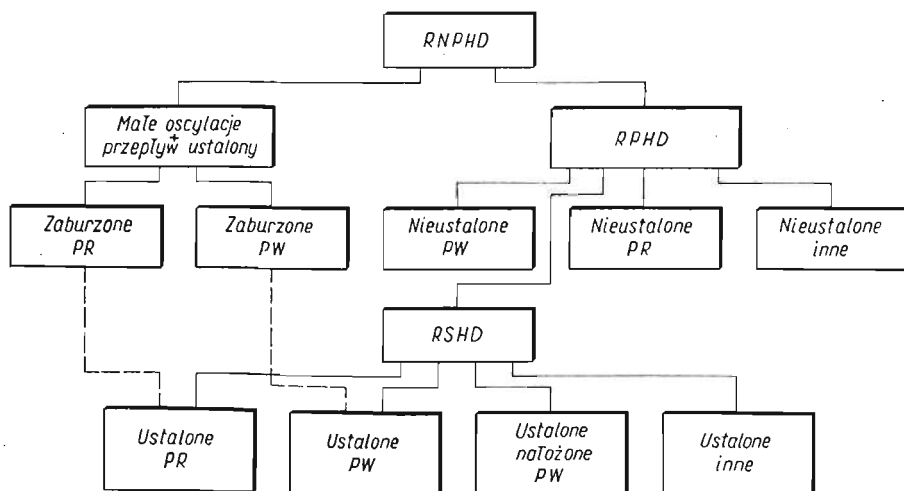
Jak wykazali JONES i WALTERS [30] wpływ małych oscylujących zaburzeń na charakterystyki przepływu podstawowego może być w pewnych przypadkach dość znaczny.

Oznaczając przez ε mały parametr określający stosunek szybkości zmiany amplitudy równoległego zaburzenia do szybkości ustalonego ścinania κ , otrzymamy

$$(5.19) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \Delta \langle T^{12} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \kappa^3 \int_0^\infty \psi(s, \kappa^2) s^2 ds \quad \text{dla} \quad \varepsilon = \text{const.}$$

A zatem zmiana średniego naprężenia ścinającego $\langle T^{12} \rangle$ jest w granicy $\omega \rightarrow 0$ proporcjonalna do kwadratu parametru ε^2 . Podobne zmiany występują dla naprężeń normalnych oraz w przypadku zaburzeń prostopadłych. Doświadczalnie zaobserwowano (por. [30]) przeszło 10% redukcję średniego momentu obrotowego dla roztworów poliakryloamidu badanych w reometrze Weissenberga z zaburzonym przepływem obrotowym.

Przedstawiona w niniejszym punkcie klasa RNPHD obejmuje wszystkie poprzednio omówione klasy przepływów jako przypadki szczególne. Na rys. 2 podano schemat klasyfikacji ułatwiający zrozumienie relacji między różnymi klasami przepływów.



Rys. 2

Na zakończenie krótkiego przeglądu zagadnień, poświęconych kinematycznej analizie przepływów cieczy lepkosprężystych, należy jeszcze raz podkreślić ogólny charakter takiego podejścia. Znajomość kinematyki danego przepływu, należącego do określonej klasy, pozwala na wykorzystanie właściwych równań konstytutywnych bez żadnych dodatkowych założeń modelowych. Stwarza to z kolei możliwość porównywania przepływów należących do tej samej klasy lub podklasy. Należy jednak pamiętać, że stosowanie analizy kinematycznej do rozwiązania różnych zagadnień brzegowych jest procesem typowo iteracyjnym. Założenie określonej kinematyki przepływu, a następnie stosowanie uproszczonych równań konstytutywnych wymaga ponownego sprawdzenia warunków przepływu łącznie z warunkami brzegowymi. Również rola badań doświadczalnych, pozwalających na określenie odpowiednich funkcji lub parametrów materiałowych charakterystycznych dla danej klasy przepływów, jest w dalszym ciągu bardzo istotna.

Literatura cytowana w tekście

1. M. REINER, *Rheology*, Handbuch der Physik, vol. VI, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.
2. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London—New York 1964.
3. A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, New York—London—Sydney 1967.
4. S. MIDDLEMAN, *The Flow of High Polymers. Continuum and Molecular Rheology*, New York—London—Sydney—Toronto 1968.
5. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, vol. III/3, Berlin—Heidelberg—New York 1965.
6. R. S. RIVLIN, J. E. ERICKSEN, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., **4** (1955) 681.
7. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rational Mech. Anal., **2** (1958) 197.
8. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., **1** (1957) 1.
9. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **6** (1960) 355.
10. A. C. PIPKIN, *Lectures on Viscoelasticity Theory*, New York—Heidelberg—Berlin 1972.
11. S. ZAHORSKI, *Powolne przepływy cieczy lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur i kanałów*, Mech. Teoret. Stos., **12** (1974) 561.
12. R. I. TANNER, *Progress in experimental rheology*, «Theoretical Rheology» pod red. HUTTONA, PEARSONA i WALTERSA, London 1975, 235.
13. G. ASTARITA, M. M. DENN, *The effect of the non-Newtonian properties of polymer solutions on flow fields*, «Theoretical Rheology» pod red. HUTTONA, PEARSONA i WALTERSA, London 1975, 333.
14. A. S. LODGE, *Body Tensor Fields in Continuum Mechanics, with Applications to Polymer Rheology*, New York 1975.
15. A. S. LODGE, K. WALTERS, *Some examples of the use of body coordinate systems in the kinematics of continuous media*, Rheol. Acta, **14** (1975) 573.
16. S. ZAHORSKI, *Flows with constant stretch history and extensional viscosity*, Arch. Mech., **23** (1971) 433.
17. S. ZAHORSKI, *Flows with proportional stretch history*, Arch. Mech., **24** (1972) 681.
18. S. ZAHORSKI, *Pewne niewiskozymetryczne przepływy cieczy lepkosprężystych*, Mech. Teoret. Stos., **10** (1972) 29.
19. W. NOLL, *Motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., **11** (1962) 97.
20. A. C. PIPKIN, D. R. OWEN, *Nearly viscometric flows*, Phys. Fluids, **10** (1967) 836.
21. B. MAXWELL, R. P. CHARTOFF, *Studies of a polymer melt in an orthogonal rheometer*, Trans. Soc. Rheol., **9** (1965) 41.
22. B. D. COLEMAN, *Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic liquids*, Arch. Rational Mech. Anal., **9** (1962) 273.
23. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin—Heidelberg—New York 1966.
24. R. R. HUILGOL, *Non-viscometric motions with constant stretch history*, A. I. Ch. E. Symp., Washington D. C. 1969.
25. R. R. HUILGOL, *On the construction of motions with constant stretch history*, MRC Technical Reports 954, Madison 1968; 975, Madison 1969.
26. C.-C. WANG, *A representation theorem for the constitutive equation of a simple material in motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., **20** (1965) 329.
27. S. ZAHORSKI, *Motions with superposed proportional stretch histories as applied to combined steady and oscillatory flows of simple fluids*, Arch. Mech., **25** (1973) 575.
28. S. ZAHORSKI, *Dynamiczne i stacjonarne własności cieczy lepkosprężystych w złożonych przepływach ścinających*, Mech. Teoret. Stos., **11** (1973) 277.
29. H. C. BOOIJ, *Effect of superimposed steady shear flow on dynamic properties of polymeric fluids*, Ph. D. Thesis, Leiden 1970.

30. T. E. R. JONES, K. WALTERS, *The behaviour of materials under combined steady and oscillatory shear*, J. Phys. A. Gen. Phys., 4 (1971) 85.

Р е з ю м е

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

В современной реологии вязко-упругих жидкостей можно выделить три общих подхода: 1) эмпирический подход, 2) асимптотический подход — применяемый для медленных или запаздывающих течений, 3) кинематический подход, в котором выводятся упрощенные физические уравнения для отдельных случаев истории деформирования, геометрии течения и т. п.

В работе представлен кинематический подход, на основании которого коротко оговорены свойства вискозиметрических течений, течений с постоянными и пропорциональными историями деформирования а также других, более сложных течений, включая течения с накладываемой пропорциональной историей деформирования. Ряд выбранных случаев течения рассмотрен более детально.

S u m m a r y

KINEMATICAL FLOW ANALYSIS OF NON-LINEAR VISCOELASTIC FLUIDS

In the modern rheology of viscoelastic fluids three general ways of approach can be distinguished: 1) an empirical approach, 2) an asymptotic approach applied for slow or retarded motions, 3) a kinematical classification approach for which certain simplified constitutive equations are derived for particular deformation histories, flow geometries etc.

According to the kinematical approach we briefly discuss properties of viscometric flows, flows with constant and proportional stretch histories as well as other more complex flows, including flows with superposed proportional stretch histories. Certain examples of particular classes of flows are discussed in greater detail.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 maja 1975 r.
