MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 14 (1976)

Z ZAGADNIEŃ HYDROSPRĘŻYSTOŚCI PŁYT

ANDRZEJ SAWICKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

Zagadnienia teorii drgań układów sprężystych kontaktujących się z układami ciekłymi są przedmiotem badań hydrosprężystości. J. WIĘCKOWSKI podaje następujące określenie: *„Przez zagadnienia hydrosprężystości rozumiemy problemy pograniczne mechaniki cieczy i mechaniki ciał odkształcalnych. Odróżniamy je zwykle od problemów aerosprężystości obecnością powierzchni swobodnej i założeniem przemiany izotermicznej"* [10]. Hydrosprężystość jest dyscypliną stosunkowo młodą, podczas gdy aerosprężystość posiada swoje tradycje i doczekała się szeregu opracowań monograficznych, np. [2]. Metody stosowane w aerosprężystości mogą być przeniesione na teren hydrosprężystości, co szczególnie dotyczy zagadnień falowych w ośrodkach ściśliwych, jednakże występują pewne osobliwe cechy, które powodują konieczność rozgraniczenia tych dwóch dyscyplin. Hydrosprężystość wyróżniają niskie prędkości, wysoka gęstość i mała ściśliwość ośrodka ciekłego. Wobec powyższego duże znaczenie posiadają tutaj zagadnienia wyznaczenia mas towarzyszących cieczy oraz rozwiązanie problemów drgań swobodnych i wymuszonych ciała sprężystego będącego w kontakcie z cieczą. Kryterium klasyfikacji zagadnienia jako zadania hydrosprężystości stanowi występowanie dodatkowych sił hydrodynamicznych spowodowanych przez sprężyste deformacje konstrukcji. Mamy więc do czynienia z trzema rodzajami sił: sprężystości, hydrodynamicznymi i bezwładności.

Z punktu widzenia teorii możemy wyodrębnić dwie grupy zagadnień hydrosprężystości. Stanowią je zagadnienia niesprzężone i sprzężone. Zagadnienia niesprzężone można sprowadzić do zagadnień hydrodynamiki przez założenie na powierzchni zwilżenia określonego rozkładu prędkości tak, że ruch układu sprężystego stanowi warunek brzegowy dla zagadnienia hydrodynamiki. Przykłady zagadnień tego typu przedstawiono w pracy [9]. Zagadnienie sprzężone charakteryzuje się wzajemnym oddziaływaniem na siebie obu ośrodków poprzez warunki brzegowe na powierzchni kontaktu. Na uwagę zasługują tutaj zagadnienia drgań płyt i powłok sprzężonych z cieczą.

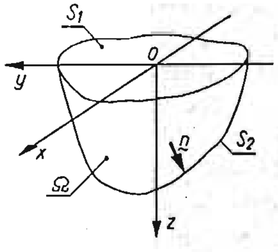
Hydrosprężystość powłok jest przedmiotem stosunkowo dużej ilości publikacji (praca przeglądowa [17]), a nawet monografii [15, 16]. Zagadnienia hydrosprężystości płyt nie posiadają tak bogatej literatury jak hydrosprężystość powłok. Z punktu widzenia zastosowań wyróżnić można prace dotyczące mechaniki kry lodowej [3], dynamiki przekryć zbiorników na ciecze [8, 13], drgań poszycia okrętów [4], drgań przegród hydrotechnicznych i fragmentów konstrukcji portowych [11, 14, 18] itp. Oprócz prac o charakterze stosowanym istnieje niewielka liczba prac podstawowych, przykładowo wymienimy prace

AFANASJEWA [12] i SOLECKIEGO [5, 6], który podał rozwiązanie zagadnienia początkowego rozchodzenia się fal w płycie pływającej na półprzestrzeni wypełnionej cieczą ściśliwą, przy działaniu impulsu punktowego i impulsu rozłożonego na prostej.

W niniejszym opracowaniu zajmiemy się sprzężonymi drganiami układu: płyta-ciecz, w ramach liniowej teorii sprężystości i liniowej teorii falowania cieczy idealnej, zachodzącego pod wpływem sił ciężkości. Płyta spoczywa na swobodnej powierzchni cieczy, która wypełnia pewien obszar przestrzeni ograniczony sztywną powierzchnią. Badany model obejmuje pewną klasę zadań hydrosprężystości płyt, którym w naturze mogą odpowiadać sztuczne lub naturalne zbiorniki wypełnione cieczą, na powierzchni której spoczywa elastyczna płyta. Przedstawiono ogólną metodę rozwiązania zagadnienia przy wykorzystaniu funkcji własnych swobodnego falowania cieczy. Metodę zilustrowano analizą dynamiczną pasma płytowego sprzężonego z cieczą. Otrzymane wyniki nie były dotychczas znane, chociaż przedstawiona metoda znalazła zastosowanie w pracach autora [7, 8], przy rozwiązaniu zagadnienia drgań dachów pływających.

2. Równania zagadnienia i metoda rozwiązania

Niech ciecz idealna wypełnia obszar Ω trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa ograniczony zamkniętą powierzchnią S. Założymy, że ciecz znajduje się w potencjalnym polu sił ciężkości i posiada swobodną powierzchnię, na której spoczywa płyta S_1, ograniczająca obszar Ω od góry. Dodatkowo przyjmiemy, że powierzchnia kontaktu jest stale zwilżona. Pozostała część obszaru Ω ograniczona jest nieruchomą i nieodkształcalną powierzchnią S_2. Tak więc $S = S_1+S_2$. Założmy ortokartezjański układ współrzędnych x, y, z taki, że powierzchnia S_1 leży w płaszczyźnie $z = 0$, oś z skierowana jest pionowo w dół (rys. 1). Zbadajmy dynamikę przedstawionego układu.



Rys. 1. Układ współrzędnych

Równanie ciągłości dla płynu nieściśliwego ma postać

$$\text{div}\,\mathbf{V} = 0, \tag{2.1}$$

co oznacza niezmienność objętości i jest konsekwencją zasady zachowania masy. $\mathbf{V}$ jest wektorem prędkości cząsteczek cieczy. W przypadku ruchu bezwirowego, gdy istnieje potencjał prędkości Φ spełniający zależność

$$\mathbf{V} = \text{grad}\,\Phi,$$

równanie ciągłości przybiera postać

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 0. \tag{2.2}$$

Potencjał prędkości Φ powinien spełniać na powierzchni S warunki brzegowe o postaci:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{2.3}$$

gdzie przez w oznaczono pionowe ugięcie płyty. Pierwszy warunek oznacza, że nie istnieje prędkość normalna do powierzchni S_2, drugi warunek oznacza zgodność prędkości przemieszczeń przylegających do siebie cząsteczek płyty i cieczy. Ugięcie w powinno spełniać równanie ruchu

$$D\nabla^4 w + \varrho h\ddot{w} = -P+Q, \tag{2.4}$$

z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla płyty. P oznacza parcie cieczy na płytę, Q jest wzbudzeniem zewnętrznym. Parcie cieczy na płytę przyjmiemy z całki Cauchy-Lagrange'a będącej jednym z rozwiązań równań ruchu Eulera

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 - gz + \frac{1}{\gamma}p = F(t), \tag{2.5}$$

gdzie g oznacza przyspieszenie grawitacyjne, γ — gęstość cieczy, p — ciśnienie, $F(t)$ — dowolną funkcję czasu, którą określa się z warunków początkowych zagadnienia (dla drgań ustalonych przyjmiemy $F = 0$). Dla małych prędkości oscylacji cieczy możemy w wyrażeniu (2.5) pominąć wielkość $V^2/2$ i wówczas, podstawiając $z = w$, otrzymamy ciśnienie na powierzchni kontaktu

$$P = -\gamma\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} - gw\right]. \tag{2.6}$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie operować, zamiast potencjałem prędkości Φ, potencjałem przemieszczeń χ określonym zależnością

$$\Phi = -\frac{\partial\chi}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Funkcja χ jest funkcją harmoniczną

$$\nabla^2\chi = 0 \tag{2.8}$$

oraz powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial\chi}{\partial z}\right|_{z=0} = -w. \tag{2.9}$$

Drugi z warunków (2.9) jest równaniem sprzężenia drgań. Ostatecznie parcie cieczy na płytę określimy wzorem

$$P = \gamma\left[\frac{\partial^2\chi(x, y, z = 0;\ t)}{\partial t^2} + gw\right]. \tag{2.10}$$

Równania (2.8), (2.9), (2.10) i (2.4) wraz z warunkami brzegowymi dla płyty opisują badane zagadnienie.

Metoda rozwiązania zagadnienia zakłada znajomość funkcji własnych φ_{mn} opisujących swobodne falowanie cieczy wypełniającej obszar ograniczony powierzchnią S_2. Dla obszarów geometrycznie prostych, które można opisać znanymi układami współrzędnych, funkcje φ_{mn} dają wyznaczyć się w sposób stosunkowo nieskomplikowany. Funkcje te spełniają równanie (2.2) i pierwszy z warunków brzegowych (2.3). Potencjał χ przedstawimy w postaci szeregu według układu funkcji własnych φ_{mn}

(2.11) $$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\varphi_{mn},$$

wówczas spełni on równanie (2.8) i pierwszy z warunków brzegowych (2.9). Drugi warunek brzegowy posłuży nam do wyznaczenia współczynników B_{mn}, po wyznaczeniu całek równania (2.4).

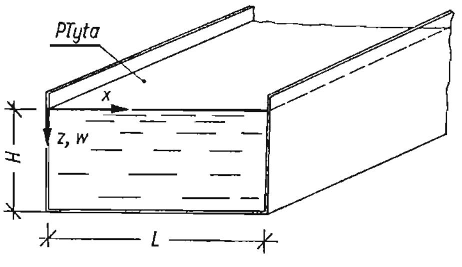
3. Drgania własne pasma płytowego

Rozpatrzmy przypadek drgań własnych pasma płytowego sprzężonego z cieczą idealną wypełniającą zbiornik o przekroju prostokątnym (rys. 2). Jest to zadanie płaskie, opisane równaniem

(3.1) $$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\varrho h\ddot{w} = -\gamma\left[\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+gw\right].$$

Dla drgań harmonicznych przyjmiemy

(3.2) $$w = e^{i\omega t}v(x).$$



Rys. 2. Pasmo płytowe sprzężone z cieczą

Równanie (2.8) i pierwszy z warunków brzegowych (2.9) spełnione są przez funkcję o postaci

(3.3) $$\chi = e^{i\omega t}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{L}(z-H)\cos\frac{n\pi}{L}x.$$

Drugi z warunków brzegowych (2.9) jest równaniem sprzężenia drgań

(3.4) $$w = e^{i\omega t}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\cos\frac{n\pi}{L}x.$$

Wykorzystując zależność (3.2) - (3.4) równanie ruchu (3.1) zapiszemy w postaci

$$D\frac{d^4v}{dx^4}-\varrho h\omega^2 v=\gamma\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\omega^2\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-g\frac{n\pi}{L}\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{3.5}$$

Dla płyty nieograniczonej przyjmiemy całkę szczególną w postaci wynikającej z potencjału przemieszczeń. Przyrównując do siebie dwa szeregi Fouriera otrzymujemy

$$B_n\left\{\left[D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g\right]\frac{n\pi}{L}\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-\omega^2\left[\varrho h\frac{n\pi}{L}\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)+\gamma\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]\right\}=0. \tag{3.6}$$

Istnieją tutaj dwie możliwości: albo $B_n = 0$, co oznacza, że nie ma drgań tej postaci, lub też wyrażenie w nawiasie jest równe zeru, skąd otrzymujemy bezpośrednio wzór na częstość

$$\omega^2=\frac{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g}{\varrho h+\frac{\gamma L}{n\pi}\mathrm{cth}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}. \tag{3.7}$$

W liczniku wyrażenia (3.7) występują składniki charakteryzujące sprężystość układu płyta-ciecz: $D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4$ pochodzi od płyty, γg przedstawia sobą ciężar właściwy cieczy, który można porównać do modułu podatności podłoża winklerowskiego (gdyż składnik γgw, występujący po prawej stronie równania ruchu przedstawia wypór cieczy na jednostkę powierzchni płyty). Wyrażenia w mianowniku oznaczają masę: ϱh jest masą płyty na jednostkę powierzchni, drugi zaś składnik jest masą towarzyszącą cieczy. Do przypadku płyty nieograniczonej powrócimy przy dyskusji całek równania ruchu.

Dla płyty o skończonej szerokości zadanie komplikuje się. Rozwiązanie równania (3.5) można przedstawić jako sumę całki ogólnej równania jednorodnego oraz całki szczególnej równania niejednorodnego

$$v=C_1\sin\varkappa x+C_2\cos\varkappa x+C_3\mathrm{sh}\,\varkappa x+C_4\mathrm{ch}\,\varkappa x+$$
$$+\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-g\frac{n\pi}{L}\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4-\varrho h\omega^2}B_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.8}$$

gdzie

$$\varkappa^4=\varrho h\omega^2/D.$$

Załóżmy, że $D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4-\varrho h\omega^2\neq 0$. Ponieważ płyta spoczywa na nieściśliwej cieczy, średnie ugięcie musi być równe zeru

$$\int_0^L v\,dx=0. \tag{3.9}$$

Warunek ten spełnia całka szczególna, również i całka ogólna musi go spełnić co oznacza, że jeżeli rozwiniemy ją w szereg cosinusowy to wyraz stały będzie równy zeru. Rozwijając funkcje argumentu $\varkappa x$ występujące w zależności (3.8) w szereg, według układu funkcji $\cos\frac{n\pi}{L}x$, otrzymujemy wyrażenie na amplitudę ugięcia v w postaci pojedynczego szeregu Fouriera. Ugięcie to musi być równe wychyleniu powierzchni cieczy, określonemu równaniem (3.4). Przyrównując te szeregi do siebie otrzymuje się wyrażenie na współczynniki B_n w postaci:

$$
\begin{aligned}
B_n = -S_n\Bigg[&C_1(2-\cos\varkappa L\cos n\pi)\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)+C_2(\sin\varkappa L\cos n\pi)\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)+\\
&+C_3(\operatorname{ch}\varkappa L\cos n\pi-1)\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)+C_4(\operatorname{sh}\varkappa L\cos n\pi)\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
S_n = \frac{2\varkappa D}{L\left[\left(D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g\right)\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-\omega^2\left(\varrho h\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)+\gamma\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right)\right]}.
$$

Podstawiając (3.10) do (3.4) otrzymujemy ostatecznie:

$$
\begin{aligned}
v = \sum_{n=1}^{\infty} R_n\Bigg[&C_1(2-\cos\varkappa L\cos n\pi)\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)+\\
&+C_2(\sin\varkappa L\cos n\pi)\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)+\\
&+C_3(\operatorname{ch}\varkappa L\cos n\pi-1)\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)+C_4(\operatorname{sh}\varkappa L\cos n\pi)\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\Bigg]\cos\frac{n\pi}{L}x,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

gdzie

$$
R_n = \frac{2\varkappa D\left(\frac{n\pi}{L}\right)\operatorname{th}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{L\left[\omega^2\left(\gamma+\varrho h\frac{n\pi}{L}\operatorname{th}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right)-\left(D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g\right)\frac{n\pi}{L}\operatorname{th}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]}.
\tag{3.11a}
$$

Mianownik w powyższym szeregu będzie równy zeru, jeżeli częstość układu będzie się równała częstości płyty nieograniczonej (3.7). Ugięcie płyty dane szeregiem (3.11) spełnia równanie różniczkowe zagadnienia. Stałe C_i obliczamy z warunków brzegowych. Przykładowo, dla płyty zamocowanej w ściankach jest

$$w|_{x=0} = w|_{x=L} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=L} = 0. \tag{3.12}$$

Zachodzi tutaj pytanie, czy wolno nam różniczkować szeregi. Majoranta szeregu (3.11) posiada wyrazy rzędu wielkości $1/n^2$, czyli szereg jest zbieżny. Po zróżniczkowaniu względem x otrzymujemy szereg o wyrazach rzędu $1/n$. Stąd wniosek, że szeregu (3.11) nie wolno różniczkować, gdyż w ogólności dostajemy szereg rozbieżny. Natomiast szereg występujący we wzorze (3.8) można różniczkować czterokrotnie, w wyniku otrzymując szereg zbieżny, gdyż współczynniki B_n są rzędu $1/n^3$, a wyrazy majoranty szeregu (3.8) są rzędu $1/n^6$. Równanie częstości własnych otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik układu równań (3.12):

$$\det\begin{vmatrix} \Sigma R_n \sin\varkappa L\cos n\pi\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) & \Sigma R_n\left\{(\mathrm{ch}\,\varkappa L\cos n\pi-1)\cdot\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)-(2-\cos\varkappa L\cdot\cos n\pi)\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\right\} & \Sigma R_n\,\mathrm{sh}\,\varkappa L\cos n\pi\cdot\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \\ \Sigma R_n \sin\varkappa L\cos^2 n\pi\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) & \Sigma R_n\left\{(\mathrm{ch}\,\varkappa L\cos n\pi-1)\cdot\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)-(2-\cos\varkappa L\cdot\cos n\pi)\left(\varkappa^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\right\}\cos n\pi & \Sigma R_n\,\mathrm{sh}\,\varkappa L\cos^2 n\pi\cdot\left(\varkappa^2-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \\ -\sin\varkappa L & -\cos\varkappa L+\mathrm{ch}\,\varkappa L & \mathrm{sh}\,\varkappa L \end{vmatrix} = 0. \tag{3.13}$$

Równanie (3.13) ma postać bardzo niedogodną do obliczeń, wobec czego w celu wyznaczenia równania częstości pójdziemy inną drogą. Całkę ogólną równania różniczkowego jednorodnego obliczymy bezpośrednio z postaci szeregu cosinusowego. Najprościej można to uczynić za pomocą skończonej transformacji całkowej Fouriera. Wykonajmy transformację cosinusową na równaniu (3.5)

$$\left(D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4-\varrho h\omega^2\right)\frac{L}{2}A_n+D\left[v'''(L)(-1)^n-v'''(O)-v'(L)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(-1)^n+\right.$$
$$\left.+v'(O)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]=\frac{L}{2}\gamma B_n\left[\omega^2\mathrm{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-g\frac{n\pi}{L}\mathrm{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right], \tag{3.14}$$

gdzie

$$A_n = \int_0^L v(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Zgodnie z wyrażeniem (3.4) jest

$$A_n = B_n\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right) \tag{3.15}$$

i współczynniki B_n określone są wzorem

$$B_n = \frac{2D\left\{v'''(O)-v'''(L)(-1)^n-v'(O)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+v'(L)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(-1)^n\right\}}{L\left\{\left[D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g\right]\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-\omega^2\left[\varrho h\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)+\gamma\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]\right\}}. \tag{3.16}$$

Porównajmy powyższą zależność z wyrażeniem (3.10). Rozpisując zależności wewnątrz nawiasu w wyrażeniu (3.10), grupując względem $(-1)^n$, $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(-1)^n$ i porównując z wyrażeniem (3.16) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v'''(O) &= \varkappa^3[C_3-2C_1],\\ v'''(L) &= \varkappa^3[-C_1\cos\varkappa L+C_2\sin\varkappa L+C_3\operatorname{ch}\varkappa L+C_4\operatorname{sh}\varkappa L],\\ v'(O) &= \varkappa[C_3+2C_1],\\ v'(L) &= \varkappa[C_1\cos\varkappa L-C_2\sin\varkappa L+C_3\operatorname{ch}\varkappa L+C_4\operatorname{sh}\varkappa L]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tutaj wyrażenia typu $\cos\varkappa L$, $\sin\varkappa L$, ... są liczbami, C_i są dowolnymi stałymi. Również wyrażenia po lewej stronie znaku równości są liczbami. Tak więc zależności (3.17) opisują przejście od stałych C_i do stałych v''', v'. Wynika stąd wniosek, że zależności (3.10) i (3.17) są identyczne. Jeżeli chcemy zbadać drgania płyty utwierdzonej w ściankach należy przyjąć

$$v'(O) = v'(L) = 0$$

i z zależności (3.4) i (3.17) otrzymamy funkcję ugięcia w postaci

$$v = -v'''(O)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{\varkappa}\cos\frac{n\pi}{L}x+v'''(L)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{\varkappa}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{3.18}$$

Pozostałe dwa warunki brzegowe

$$v(O) = v(L) = 0$$

dają układ równań

$$\begin{aligned} v'''(O)\sum_{n=1}^{\infty}R_n-v'''(L)\sum_{n=1}^{\infty}R_n(-1)^n &= 0,\\ v'''(O)\sum_{n=1}^{\infty}R_n(-1)^n-v'''(L)\sum_{n=1}^{\infty}R_n &= 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

z którego otrzymujemy równanie częstości własnych

$$\sum_{n=1,3,5\ldots} R_n \cdot \sum_{n=2,4,6\ldots} R_n = 0. \tag{3.20}$$

Amplitudy drgań własnych określone są z dokładnością do stałej przez zależność

$$\begin{gathered} v = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(-1)^n \cos\frac{n\pi}{L}x - \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n(-1)^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos\frac{n\pi}{L}x, \\ G_n = \frac{1}{\omega^2\left(\dfrac{\gamma g}{g\dfrac{n\pi}{L}\operatorname{th}\left(\dfrac{n\pi}{L}H\right)} + \varrho h\right) - \left(D\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^4 + \gamma g\right)}. \end{gathered} \tag{3.21}$$

W przypadku płyty swobodnie podpartej o wiele wygodniej jest zastosować skończoną transformację sinusową. Wówczas otrzymujemy nieskończony układ równań na wyznaczenie współczynników B_n. Z wyznacznika tego układu dostaniemy równanie częstości własnych.

4. Drgania wymuszone

Zajmiemy się przypadkiem wymuszonych drgań stacjonarnych, przy założeniu, że wzbudzenie zewnętrzne przedstawić można w przedziale $\langle O, L\rangle$ szeregiem cosinusowym

$$q = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{4.1}$$

W podobnej postaci przedstawimy potencjał przemieszczeń χ oraz funkcję ugięcia w

$$\chi = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{L}(z-H)\cos\frac{n\pi}{L}x, \tag{4.2}$$

$$w = e^{i\vartheta t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\cos\frac{n\pi}{L}x, \tag{4.3}$$

gdzie ϑ oznacza częstość wzbudzenia. Szeregi (4.1)$\div$(4.3) sumujemy od wyrazu z indeksem $n = 1$, gdyż wyraz $n = 0$ odpowiada równomiernie rozłożonemu ciśnieniu, które jest całkowicie przejmowane przez ciecz, ze względu na jej nieściśliwość [8].

Równanie drgań wymuszonych ma postać

$$\begin{aligned} D\frac{d^4 v}{dx^4} - \varrho h\vartheta^2 v = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\vartheta^2 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right) - g\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]\cos\frac{n\pi}{L}x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos\frac{n\pi}{L}x. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Po wykonaniu na równaniu (4.4) skończonej transformacji Fouriera oraz postępując w sposób podany w rozdziale 3 otrzymujemy, dla przypadku płyty utwierdzonej, współczynniki B_n

$$(4.5)\qquad B_n = \frac{\frac{2D}{L}[-v'''(L)(-1)^n+v'''(O)]-Q_n}{\left[D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g\right]\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)-\vartheta^2\left[\gamma\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)+\varrho h\frac{n\pi}{L}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]}$$

oraz ugięcie płyty

$$(4.6)\qquad w = e^{i\vartheta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2D}{L}[v'''(O)-v'''(L)(-1)^n]\right\}R_n^*\cos\frac{n\pi}{L}x-e^{i\vartheta t}\sum_{n=1}^{\infty}Q_nR_n^*\cos\frac{n\pi}{L}x,$$

gdzie

$$R_n^* = \frac{1}{\left[D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\gamma g\right]-\vartheta^2\left[\varrho h+\gamma\frac{L}{n\pi}\operatorname{cth}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\right]}.$$

Wykorzystanie warunków brzegowych $v(O) = v(L) = 0$ daje układ równań na wyznaczenie stałych $v'''(O)$ i $v'''(L)$:

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} v'''(O)\sum_{n=1}^{\infty}R_n^*-v'''(L)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nR_n^* &= \frac{L}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}Q_nR_n,\\ v'''(O)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nR_n^*-v'''(L)\sum_{n=1}^{\infty}R_n^* &= \frac{L}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}Q_nR_n(-1)^n, \end{aligned}$$

skąd

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} v'''(O) &= \frac{L}{2DW}\left[\sum_n Q_nR_n^*(-1)^n\sum_n(-1)^nR_n^*-\sum_n R_n^*\sum_n Q_nR_n^*\right],\\ v'''(L) &= \frac{L}{2DW}\left[\sum_n R_n^*\sum_n Q_nR_n^*(-1)^n-\sum_n(-1)^nR_n^*\sum_n Q_nR_n^*\right],\\ W &= \left[\sum_n(-1)^nR_n^*\right]^2-\left[\sum_n R_n^*\right]^2. \end{aligned}$$

Mianownik w wyrażeniach (4.8) jest identyczny z lewą stroną równania częstości własnych (3.20), skąd wynika wniosek, że jeżeli częstość wymuszenia ϑ będzie równa jednej z częstości własnych wystąpi zjawisko rezonansu. Można wykazać, że dla tego przypadku amplitudy drgań będą z czasem narastały. W tym celu należy przyjąć

$$(4.9)\qquad q = \sin\vartheta t\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\cos\frac{n\pi}{L}x,$$

$$\chi = t\cos\vartheta t \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\cos\frac{n\pi}{L}x \tag{4.10}$$

oraz zastosować znaną już procedurę postępowania. W wyniku otrzymuje się prawo narastania wychyleń w czasie

$$w = -\frac{t\cos\vartheta t}{2\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n\frac{n\pi}{L}\operatorname{th}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}{\varrho h\frac{n\pi}{L}\operatorname{th}\left(\frac{n\pi}{L}H\right)+\gamma}\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{4.11}$$

5. Przykład

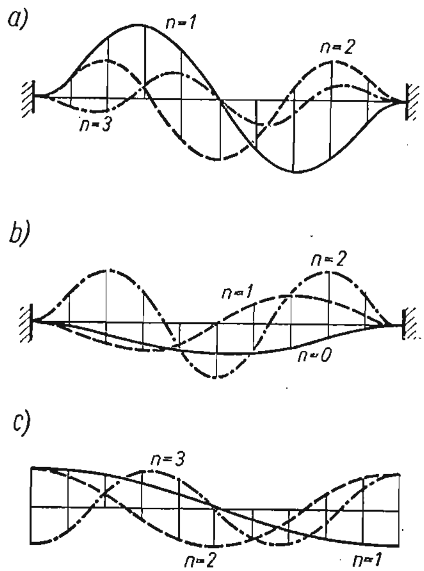
Jako ilustrację przedstawionej metody rozwiązania zagadnienia sprzężonych drgań układu płyta–ciecz podaje się wyniki obliczeń częstości drgań własnych dla następujących danych:

$$L = 2\text{ m},\ h = 0{,}5\text{ cm},\ H = 1/10\,L,\ 1/4L,\ 1/2L,\ L,$$

$$\varrho = 7{,}8\text{ t/m}^3,\ E = 2{,}1\cdot 10^6\text{ kG/cm}^2,\ \gamma = 1\text{ t/m}^3.$$

W tablicy 1 przedstawiono pierwsze częstości drgań własnych pasma sprzężonego z cieczą, przy wykorzystaniu wzoru (3.20). W tablicy 2 dla porównania przedstawiono częstości drgań własnych samej płyty obliczone według wzorów ścisłych i z równania (3.20), przy założeniu $\gamma = 0$. W tablicy 3 podano częstości drgań własnych samej cieczy.

Na rys. 3 przedstawiono postacie drgań własnych odpowiednio dla układu sprzężonego, samej płyty i samej cieczy. Przykład służy jako weryfikacja metody rozwiązania zagadnienia



Rys. 3. Postacie drgań własnych: a) układ sprzężony, b) płyta bez cieczy, c) ciecz bez płyty

Tablica 1. Częstości drgań własnych $\omega_n[s^{-1}]$ pasma sprzężonego z cieczą. Górne liczby odpowiadają 6 wyrazom równania częstości, dolne 4 wyrazom szeregu

H/L \ n	1	2	3	4
$\frac{1}{10}$	18,8	62,295	139,631	244,45
	19,736	65,35		
$\frac{1}{4}$	26,925	76,418	154,874	328,951
	27,532	79,235		
$\frac{1}{2}$	30,315	78,358	157,293	157,293
	31,225	81,414		
1	31,346	78,358	157,293	331,699
	32,229	81,414		

Tablica 2. Częstości drgań własnych płyty $[s^{-1}]$

n	0	1	2	3	4
Obliczenie wg wzorów ścisłych	41,388	114,287	223,687	369,729	552,341
Obliczone ze wzoru (3.20) przy założeniu $\gamma = 0$		107,768	208,208	381,87	557,689

Tablica 3. Częstości drgań własnych cieczy $[s^{-1}]$

H/L \ n	1	2	3	4
$\frac{1}{10}$	2,164	4,142	5,831	7,236
$\frac{1}{4}$	3,178	5,315	6,736	7,833
$\frac{1}{2}$	3,758	5,539	6,797	7,849
1	3,915	5,55	6,797	7,849

drgań płyty sprzężonej z cieczą. Na jego podstawie można wyciągnąć kilka ogólnych wniosków, które ponadto wynikają z analizy otrzymanych wyników ogólnych. Częstości drgań własnych układu sprzężonego są niższe od częstości drgań samej płyty, co można wytłumaczyć większą bezwładnością układu. W obliczeniach inżynierskich często stosuje się przybliżony sposób rozwiązania zagadnienia drgań układów sprzężonych przez wyznaczenie masy towarzyszącej cieczy [14, 18].

Postacie drgań własnych charakteryzują się występowaniem punktów węzłowych, których liczba jest równa numerowi kolejnej postaci drgań. Kształt funkcji własnych jest taki sam jak w przypadku samej płyty, przy czym ze względu na nieściśliwość cieczy nie występuje funkcja odpowiadająca $n = 0$. Ponadto, funkcje własne układu sprzężonego (rys. 3a) muszą spełniać warunek (3.9), co powoduje pewną deformację ich kształtu w stosunku do funkcji własnych płyty (rys. 3b). Poprawność otrzymanych wzorów można sprawdzić przez porównanie częstości własnych samej płyty, otrzymanych ze wzorów ścisłych i ze wzoru (3.20). Błąd przybliżenia, spowodowany uwzględnieniem 6 wyrazów szeregu, jest rzędu kilku procent.

6. Zakończenie

W pracy przedstawiono rozważania na temat sprzężonych drgań układu płyta–ciecz. W pierwszej kolejności otrzymano rozwiązanie dla płyty nieskończonej. Jeżeli założymy, że nie ma płyty ($D = \varrho h = 0$) wówczas z zależności (3.7) otrzymamy częstość swobodnego falowania cieczy. Przy założeniu, że nie ma cieczy ($\gamma = 0$) otrzymujemy wzór na częstość

$$\omega^2 = \frac{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}{\varrho h}, \tag{6.1}$$

równoznaczny z zależnością $\varkappa^4 = (n\pi/L)^4$. Dla tego przypadku rozwiązanie szczególne równania ruchu (3.5) można otrzymać metodą uzmienniania stałych, która jest jednak mało efektywna ze względu na całkową postać funkcji ugięcia i uniemożliwia interpretację fizyczną przypadku $\varkappa = n\pi/L$. Badając płytę nieograniczoną otrzymujemy tę interpretację natychmiast, mianowicie przypadek $\varkappa = n\pi/L$ oznacza, że płyta drga niezależnie od cieczy jedną z jej postaci własnych (nie ma sprzężenia drgań). W przypadku płyty o skończonej szerokości problem ten nie wystąpi ze względu na zaburzenia brzegowe. W przypadku, gdy w równości (3.7) pominiemy masę towarzyszącą cieczy otrzymamy częstość drgań własnych płyty na podłożu typu Winklera o module podatności γg.

W poszukiwaniu rozwiązania dla płyty o skończonej szerokości można pójść dwiema drogami. Sposób pierwszy polega na przedstawieniu rozwiązania w postaci liniowej kombinacji (3.8) niezależnych rozwiązań jednorodnego równania ruchu i całki szczególnej równania niejednorodnego. Po wyznaczeniu współczynników B_n otrzymano wyrażenie na ugięcie w postaci szeregu zbieżnego (3.11), którego jednakże nie wolno było różniczkować, gdyż w wyniku otrzymywano szereg rozbieżny. Tak więc zamiast różniczkować wyrażenie (3.11) różniczkowano zależność (3.8). Otrzymane tym sposobem równanie częstości posiada złożoną postać, niedogodną do obliczeń numerycznych. Drugi sposób rozwiązania równań zagadnienia polegał na zastosowaniu całkowych transformacji Fouriera, które w prosty sposób pozwoliły otrzymać wyniki dogodne do obliczeń numerycznych. Poprawność przedstawionej metody rozwiązania zagadnienia potwierdził przykład liczbowy.

W zagadnieniach teorii drgań ważną rolę odgrywają problemy tłumienia. W hydrosprężystości może wystąpić tłumienie dwojakiego rodzaju: związane ze strukturą wewnętrzną układu sprężystego i lepkością cieczy oraz tłumienie hydrodynamiczne związane z rozpraszaniem energii, która zostaje zamieniona na energię fal powierzchniowych. W analizowanym przypadku badano ciecz idealną i płytę idealnie sprężystą, wobec czego tłumienie wewnętrzne nie wystąpiło. Podobnie z tłumieniem hydrodynamicznym, które ma znaczenie w przypadku nieograniczonych układów ciekłych i fal progresywnych (w badanym zagadnieniu drgania mają charakter fal stojących).

Literatura cytowana w tekście

1. A. H. FLAX, *Aero and hydro-elasticity*, Proc. of the 1st Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, 1960.
2. Y. C. FUNG, *An introduction to the theory of aeroelasticity* (przekład rosyjski, Moskwa 1959).
3. A. D. KERR, W. T. PALMER, *The deformation and stresses in floating ice plates*, Acta Mechanica, 15 (1972).
4. W. KURSKI, *Drgania stacjonarne płyt poszycia okrętu* (praca doktorska), Politechnika Gdańska, 1960 (nie publikowana).
5. R. SOLECKI, *Vibrations of a floating plate I*, Bull. Ac. Pol. Sc., Serie Sc. Techn., 11 - 12,**XIV**, (1966).
6. R. SOLECKI, *Vibration of a floating plate II*, Bull. Ac. Pol. Sc., Serie Sc. Techn., 1, **XV** (1967).
7. A. SAWICKI, *Osiowosymetryczne drgania swobodne dachu pływającego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe, **XXV**, 204 (1974).
8. A. SAWICKI, *Dynamika dachów pływających*, Rozpr. Inż., 2 (1975).
9. J. WIĘCKOWSKI, *Równania drgań giętnych kadłuba statku*, Bibl. Mech. Stos., Warszawa 1957.
10. J. WIĘCKOWSKI, *Hydrosprężystość i mechanika pływania*, referat na II Kongres Nauki Polskiej, 1972.
11. YI-KWEI WEN, MASANOBU SHINOZUKA, *Analysis of floating plate under ocean waves*, Journal of Waterways and Harbors Division, May 1972.
12. Э. Ф. АФАНАСЕВ, Прикл. Мат. Мех., **28**, 5 (1964).
13. Л. В. ДОКУЧАЕВ, *О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана*, Строительная механика и расчет сооружений, 1 (1972).
14. П. П. КУЛЬМАЧ, *Гидродинамика гидротехнических сооружений*, АН СССР, Москва 1963.
15. И. М. РАПОПОРТ, *Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью*, Москва 1966.
16. М. А. КИЛЬЧЕВСКИЙ, *Механика систем оболочка—жидкость—нагретый газ*, Наукова Думка, Киев 1970.
17. Э. И. ГРИГОЛЮК, *Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью*, Труды VII Конф. по теории пластинок и оболочек, Москва 1970.
18. С. Г. ШУЛЬМАН, *Некоторые случаи свободн ых колебаний пластин и цилиндрических оболочек, соприкасающихся с жидкостью*, Труды VI конф. по теории пластинок и оболочек.

Р е з ю м е

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОУПРУГОСТИ ПЛИТ

В работе рассматриваются стационарные сопряженные колебания системы плита—жидкость. Пластина покоится на свободной поверхности жидкости заполняющей ограниченную жесткой поверхностью область пространства. Исследуемая модель охватывает некоторый класс задач гидропругости плит, которым в действительности могут соответствовать натуральные или искусственнуые, наполненные жидкостью емкости, на поверхности которых покоится упругая плита. Представлен общий метод решения с использованием собственных функций свободного волнения идеальной жидкости. Метод иллюстрируется динамическим анализом сопряженной с жидкостью полосы.

Summary

CERTAIN PROBLEMS OF HYDROELASTICITY OF PLATES

The paper deals with considerations of stationary, coupled vibrations of the system: plate-ideal liquid• The plate lies on a free surface of liquid filling the space being bounded by a rigid surface.

The model investigated describes a certain class of hydroelasticity problems of artificial or natural liquid reservoires with elastic plates resting on their surface.

The general method of solution is based on the application of eigenfunctions of free oscillations of liquid. The method is illustrated by dynamic analysis of a plate strip coupled with liquid.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1975 r.