MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 12 (1974)

PRZEPŁYW CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE MIĘDZY WIRUJĄCYMI POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI

EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

Wstęp

Laminarny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi tarczami [1–8, 12], stożkami [9, 10] oraz powierzchniami obrotowymi [11] od dawna zwracał uwagę ze względu na możliwości szerokich zastosowań praktycznych zarówno w badaniach przepływowych maszyn wirnikowych, jak i w teorii łożysk wzdłużnych. Autorzy większości cytowanych prac ujmują zagadnienie przepływu w szczelinie między wirującymi tarczami w oparciu o równania warstwy przyściennej (lub o równania zbliżone do równań warstwy przyściennej) dopuszczające istnienie rozwiązań samopodobnych. W pracach [10, 12] rozwiązano zagadnienie przepływu w szczelinie między wirującymi powierzchniami stożkowymi i wirującymi płaskimi tarczami wychodząc z uproszczonych zlinearyzowanych równań ruchu cieczy lepkiej. W pracy [11] rozwiązano zagadnienie przepływu w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi, których kształt opisany jest funkcjami spełniającymi pewne warunki, dopuszczające istnienie rozwiązań samopodobnych dla równań warstwy przyściennej.

Celem tej pracy jest podanie w postaci ogólnej rozwiązania zlinearyzowanych równań ruchu ustalonego cieczy lepkiej o stałej lepkości w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi o dowolnym kształcie.

1. Równania ruchu

Rozpatrzmy przepływ ustalony cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi o poziomej osi symetrii (rys. 1), z których wewnętrzna wiruje z prędkością kątową ω_1 a zewnętrzna — z prędkością kątową ω_2. Wprowadźmy krzywoliniowy układ współrzędnych x, θ, y, przy czem oś x niech będzie skierowana wzdłuż linii symetrii południkowego przekroju szczeliny, oś y prostopadle do linii symetrii szczeliny. Element długości łuku w przyjętym układzie współrzędnych określa wzór [1]:

$$ds^2 = dx^2 + R^2(x)d\theta^2 + dy^2,$$

gdzie $R(x)$ jest odległością od osi obrotu. Zatem współczynniki Lamégo będą równe: $H_x = 1$, $H_\theta = R(x)$, $H_y = 1$. Posługując się nimi możemy — przy założeniu, że grubość h szczeliny jest mała w porównaniu do promienia R, co wyrazi się zależnością

$$h(x) \ll R(x),$$

przedstawić równania ruchu cieczy lepkiej w układzie współrzędnych krzywoliniowych [13] dla osiowej symetrii w postaci:

$$(1.1)\qquad v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{R'}{R}v_\theta^2=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{R'}{R}\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{R''}{R}v_x-\frac{R'^2}{R^2}v_x\right),$$

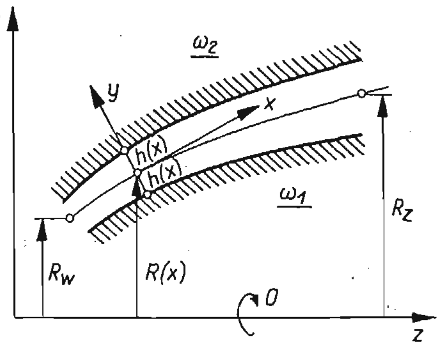
$$(1.2)\qquad v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_\theta}{\partial y}+\frac{R'}{R}v_xv_\theta=\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2}+\frac{R'}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial x}-\frac{R''}{R}v_\theta-\frac{R'^2}{R^2}v_\theta\right),$$

$$(1.3)\qquad v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{R'}{R}\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

oraz równanie ciągłości

$$(1.4)\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial(Rv_x)}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$

gdzie primem oznaczono pochodną względem zmiennej x.



Rys. 1

Przyjęte wcześniej założenie, że $h(x) \ll R(x)$ pozwala po dokonaniu odpowiednich przejść asymptotycznych [10, 12], wynikających z oszacowania poszczególnych składników, sprowadzić równania ruchu (1.1)–(1.3) do układu równań liniowych:

$$(1.5)\qquad -\frac{R'}{R}v_\theta^2=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$(1.6)\qquad 0=\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2},$$

$$(1.7)\qquad 0=\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Równań tych użyjemy do zbadania przepływu cieczy w szczelinie.

2. Całki równań ruchu

Rozwiązania równań ruchu powinny spełniać warunki brzegowe:

$$v_x(x, \pm h) = 0, \tag{2.1}$$

$$v_\theta(x, -h) = R(x)\omega_1, \quad v_\theta(x, +h) = R(x)\omega_2, \tag{2.2}$$

$$v_y(x, \pm h) = 0. \tag{2.3}$$

Ponadto na wlocie i wylocie ze szczeliny powinny być spełnione warunki brzegowe dotyczące ciśnienia:

$$p = p_w \quad \text{dla} \quad x = x_w, \tag{2.4}$$

$$p = p_z \quad \text{dla} \quad x = x_z, \tag{2.5}$$

gdzie przez x_w oznaczono współrzędną wlotu na linii symetrii przekroju południkowego szczeliny, a przez x_z — współrzędną wylotu na tej linii.

Całkując równanie (1.6) względem zmiennej y i wyznaczając stałe całkowania z warunków brzegowych (2.2) otrzymamy

$$v_\theta = \frac{R}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)-(\omega_1-\omega_2)\frac{y}{h}\right]. \tag{2.6}$$

Z równania (1.7) wynika, że

$$p = p(x). \tag{2.7}$$

Następnie całkując równanie ciągłości (1.4) w poprzek szczeliny i uwzględniając warunki brzegowe dostaniemy

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}R\int_{-h}^{h} v_x dy + v_y\Big|_{-h}^{h} = 0,$$

a stąd wynika

$$\int_{-h}^{h} v_x dy = \frac{C_1}{R(x)}. \tag{2.8}$$

Podstawiając wartość składowej prędkości v_θ ze wzoru (2.6) do równania (1.5) otrzymamy po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku brzegowego (2.1) oraz zależności (2.7):

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2-h^2) - \frac{RR'}{4\nu}\left[\frac{y^4-h^4}{12h^2}(\omega_1-\omega_2)^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{y^3-h^2y}{3h}(\omega_1^2-\omega_2^2)+\frac{y^2-h^2}{2}(\omega_1+\omega_2)^2\right]. \tag{2.9}$$

Po uwzględnieniu powyższej zależności w (2.8) i po wykonaniu całkowania znajdziemy

$$p = \frac{\varrho R^2\Omega^2}{8} + \frac{[A(x)-A_z]B_w - [A(x)-A_w]B_z}{A_w - A_z}, \tag{2.10}$$

gdzie oznaczono:

$$
\begin{aligned}
& A(x) = \int \frac{dx}{h^3(x)R(x)}, \\
& A_w = A(x_w), \quad A_z = A(x_z); \\
(2.11) \quad & B_w = p_w - \varrho\frac{\Omega^2 R_w^2}{8}, \quad B_z = p_z - \varrho\frac{\Omega^2}{8}R_z^2, \\
& R_w = R(x_w), \quad R_z = R(x_z); \\
& \Omega^2 = \frac{1}{5}(\omega_1-\omega_2)^2+(\omega_1+\omega_2)^2.
\end{aligned}
$$

Wprowadzając (2.10) do (2.9) wyznaczymy

$$
(2.12) \quad v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{B_w-B_z}{A_w-A_z}\frac{y^2-h^2}{h^3 R} - \frac{RR'}{4\nu}\left[\frac{5y^4-6h^2y^2+h^4}{60h^2}(\omega_1-\omega_2)^2 - \frac{y^3-h^2y}{3h}(\omega_1^2-\omega_2^2)\right].
$$

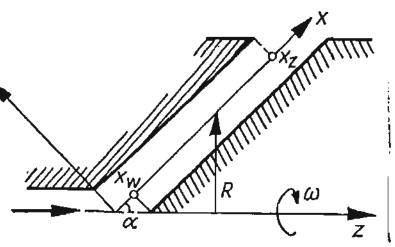
Składową prędkości v_y wyznaczymy podstawiając (2.12) do (1.4) i całkując otrzymane wyrażenie względem zmiennej y:

$$
(2.13) \quad v_y = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{6\mu}\frac{B_w-B_z}{A_w-A_z}\frac{y^3-3h^2y}{h^3} - \frac{R^2R'}{4\nu}\left[\frac{y(y^2-h^2)^2}{60h^2}(\omega_1-\omega_2)^2 - \frac{(y^2-h^2)^2}{12h}(\omega_1^2-\omega_2^2)\right]\right\}.
$$

Równania (2.6), (2.10), (2.12) oraz (2.13) pozwalają określić składowe prędkości i rozkład ciśnienia w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi.

3. Przykłady zastosowań

Wyprowadzone wyżej równania zostaną użyte do określenia parametrów przepływu w szczelinach między wirującymi powierzchniami stożkowymi i kulistymi. Dla uproszczenia



Rys. 2

założymy, że wiruje tylko powierzchnia wewnętrzna, co wyrazi się zależnościami:

$$
(3.1) \quad \omega_1 = \omega \neq 0, \quad \omega_2 = 0.
$$

3.1. Przepływ między powierzchniami stożkowymi o równych kątach rozwarcia. Rozważmy dwie równoległe powierzchnie stożkowe; z rys. 2 wynikają zależności:

$$R = x\sin\alpha, \quad R_w = x_w\sin\alpha, \quad R_z = x_z\sin\alpha, \quad h = \text{const}. \tag{3.2}$$

Uwzględniając (3.1) oraz (3.2) we wzorach określających składowe prędkości i rozkład ciśnień otrzymamy:

$$v_\theta = \frac{\omega\sin\alpha}{2}\left(1-\frac{y}{h}\right)x, \tag{3.3}$$

$$v_x = \frac{p_w-p_z+0{,}15\varrho\omega^2(R_z^2-R_w^2)}{2\mu\ln\frac{R_w}{R_z}}\,\frac{y^2-h^2}{x} - \frac{\omega^2\sin^2\alpha}{4\nu h^2}\left[\frac{1}{60}(5y^4-6h^2y^2+h^4)-\frac{h}{3}(y^3-h^2y)\right]x, \tag{3.4}$$

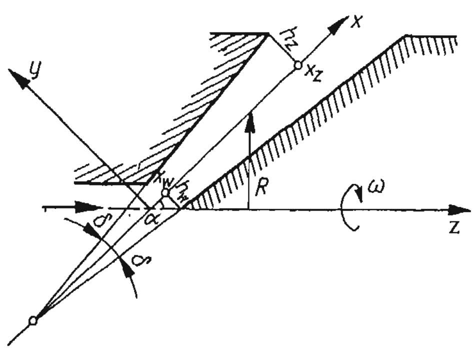
$$v_y = \frac{\omega^2\sin^2\alpha}{2\nu h^2}\left(\frac{y-5h}{60}\right)(y^2-h^2)^2, \tag{3.5}$$

$$p = 0{,}15\varrho\omega^2x^2\sin^2\alpha + \frac{(p_w-0{,}15\varrho\omega^2R_w^2)\ln\frac{x\sin\alpha}{R_z}-(p_z-0{,}15\varrho\omega^2R_z^2)\ln\frac{x\sin\alpha}{R_w}}{\ln\frac{R_w}{R_z}}. \tag{3.6}$$

Otrzymane tutaj zależności dla składowych prędkości i ciśnienia są identyczne z zależnościami wyprowadzonymi w pracy [10].

3.2. Przepływ między powierzchniami stożkowymi o różnych kątach rozwarcia. Dla szczeliny między powierzchniami stożkowymi o różnych kątach rozwarcia mają miejsce zależności geometryczne (rys. 3):

$$R = x\sin\alpha, \quad h = h_w+(x-x_w)\delta, \quad h' = \delta, \quad \delta \ll 1. \tag{3.7}$$



Rys. 3

Podstawiając (3.1) i (3.7) do wzorów określających parametry przepływu dostaniemy:

$$v_\theta = \frac{\omega \sin\alpha}{2}\left(1-\frac{y}{h}\right)x, \tag{3.8}$$

$$v_x = -\frac{[p_w-p_z+0{,}15\varrho\omega^2(R_z^2-R_w^2)](y^2-h^2)}{\dfrac{2\mu x h^3}{(h_w-x_w\delta)^3}\left[\ln\dfrac{x_z h_w}{x_w h_z}+2\delta\left(\dfrac{x_w}{h_w}-\dfrac{x_z}{h_z}\right)-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{x_w^2}{h_w^2}-\dfrac{x_z^2}{h_z^2}\right)\right]} - \frac{\omega^2\sin^2\alpha}{4\nu h^2}\left[\frac{1}{60}(5y^4-6h^2y^2+h^4)-\frac{h}{3}(y^3-h^2y)\right]x, \tag{3.9}$$

$$v_y = -\frac{\delta[p_w-p_z+0{,}15\varrho\omega^2(R_z^2-R_w^2)](y^2-h^2)y}{\dfrac{2\mu x h^3}{(h_w-x_w\delta)^3}\left[\ln\dfrac{x_z h_w}{x_w h_z}+2\delta\left(\dfrac{x_w}{h_w}-\dfrac{x_z}{h_z}\right)-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{x_w^2}{h_w^2}-\dfrac{x_z^2}{h_z^2}\right)\right]} + \tag{3.10}$$

$$+\frac{\omega^2\sin^2\alpha}{2\nu h^2}\left(\frac{y-5h}{60}\right)(y^2-h^2)^2-\frac{\delta\omega^2\sin^2\alpha}{4\nu}\,\frac{x(y^2-h^2)}{h^3}\,\frac{[5h(y^2-h^2)-2(y^2+h^2)(5h-y)]}{60},$$

$$p = 0{,}15\varrho\omega^2x^2\sin^2\alpha + \tag{3.11}$$

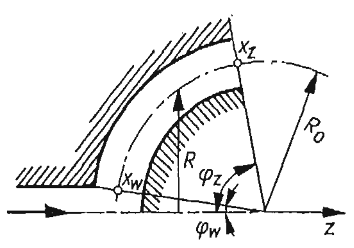
$$+\frac{(p_w-0{,}15\varrho\omega^2R_w^2)\left[\ln\dfrac{x_z h}{x h_z}+2\delta\left(\dfrac{x}{h}-\dfrac{x_z}{h_z}\right)-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{h^2}-\dfrac{x_z^2}{h_z^2}\right)\right]}{\ln\dfrac{x_z h_w}{x_w h_z}+2\delta\left(\dfrac{x_w}{h_w}-\dfrac{x_z}{h_z}\right)-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{x_w^2}{h_w^2}-\dfrac{x_z^2}{h_z^2}\right)} -$$

$$-\frac{(p_z-0{,}15\varrho\omega^2R_z^2)\left[\ln\dfrac{x_w h}{x h_w}+2\delta\left(\dfrac{x}{h}-\dfrac{x_w}{h_w}\right)-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{x^2}{h^2}-\dfrac{x_w^2}{h_w^2}\right)\right]}{\ln\dfrac{x_z h_w}{x_w h_z}+2\delta\left(\dfrac{x_w}{h_w}-\dfrac{x_z}{h_z}\right)-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{x_w^2}{h_w^2}-\dfrac{x_z^2}{h_z^2}\right)}.$$

Dla $\delta = 0$ (co odpowiada szczelinie o stałej grubości) powyższe wzory pokrywają się ze wzorami dla poprzedniego przypadku.

3.3. Przepływ między powierzchniami kulistymi. Zależności geometryczne prowadzą do związków (rys. 4):

$$R = R_0\sin\varphi, \quad \varphi = x/R_0, \quad R' = \cos\varphi, \quad h = \text{const}. \tag{3.12}$$



Rys. 4

Uwzględniając (3.1) oraz (3.12) we wzorach określających parametry przepływu wyznaczymy:

$$v_\theta = \frac{\omega R_0}{2}\left(1-\frac{y}{h}\right)\sin\varphi, \tag{3.13}$$

$$v_x = \frac{p_w-p_z+0{,}15\varrho\omega^2R_0^2(\sin^2\varphi_z-\sin^2\varphi_w)}{2\mu\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_w}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_z}{2}\right)}\,\frac{y^2-h^2}{R_0\sin\varphi} - \frac{\omega^2R_0\sin2\varphi}{8\nu h^2}\left[\frac{1}{60}(5y^4-6h^2y^2+h^4)-\frac{h}{3}(y^3-h^2y)\right], \tag{3.14}$$

$$v_y = \frac{(2-3\sin^2\varphi)\omega^2}{4\nu h^2}\left(\frac{y-5h}{60}\right)(y^2-h^2)^2, \tag{3.15}$$

$$p = 0{,}15\varrho\omega^2R_0^2\sin^2\varphi + \frac{(p_w-0{,}15\varrho\omega^2R_0^2\sin^2\varphi_w)\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_z}{2}\right)}{\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_w}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_z}{2}} - \frac{(p_z-0{,}15\varrho\omega^2R_0^2\sin^2\varphi_z)\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_w}{2}\right)}{\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_w}{2}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_z}{2}}. \tag{3.16}$$

4. Uwagi końcowe

Wzory odnoszące się do składowych prędkości, otrzymane w p. 3 pracy, dla stałej grubości szczeliny można przedstawić w uproszczonej postaci niezależnie od kształtu powierzchni ograniczających przepływ:

$$v_\theta = D_1^s f_1(\eta), \tag{4.1}$$

$$v_x = D_2^s f_2(\eta)+D_3^s f_3(\eta), \tag{4.2}$$

$$v_y = D_4^s f_4(\eta); \tag{4.3}$$

dla szczeliny zaś o zmiennej grubości w postaci:

$$v_\theta = D_1^z f_1(\eta), \tag{4.4}$$

$$v_x = D_2^z f_2(\eta)+D_3^z f_3(\eta), \tag{4.5}$$

$$v_y = D_4^z f_4(\eta)+D_5^z f_5(\eta)+D_6^z f_6(\eta); \tag{4.6}$$

gdzie oznaczono dla uproszczenia:

$$f_1(\eta) = 1-\eta, \quad f_2(\eta) = 1-\eta^2,$$

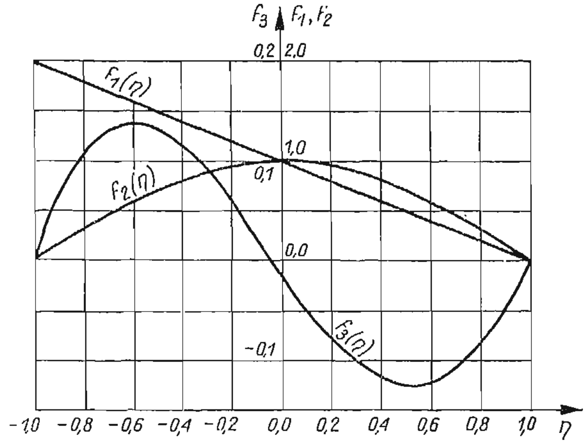
$$f_3(\eta) = \frac{1}{60}(5\eta^4-6\eta^2+1)-\frac{\eta}{3}(\eta^2-1),$$

$$f_4(\eta) = \frac{\eta-5}{60}(\eta^2-1)^2, \quad f_5(\eta) = \eta(\eta^2-1),$$

$$f_6(\eta) = [5(\eta^2-1)-2(\eta^2+1)(5-\eta)](\eta^2-1), \qquad \eta = \frac{y}{h}.$$

Tutaj D_i^s, D_i^z oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny. Górny wskaźnik oznacza odpowiednio stałą lub zmienną grubość szczeliny.

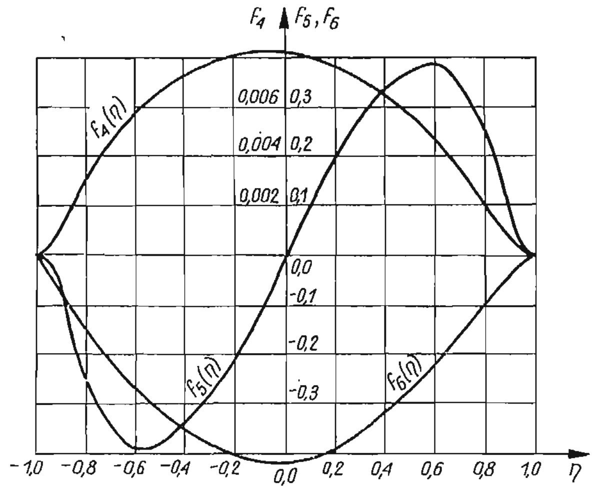
Z analizy otrzymanych wzorów wynika, że przepływ w szczelinie jest wywołany przez dwa czynniki: ruch wirowy powierzchni ograniczających szczelinę (w przypadkach szcze-



Rys. 5

gólnych — przez ruch wirowy powierzchni wewnętrznej) oraz przez różnicę ciśnień między wlotem i wylotem szczeliny.

Wzory charakteryzujące składowe prędkości przepływu dla przypadków szczególnych omówionych w p. 3 pozwalają stwierdzić, że profil prędkości obwodowej v_θ dla ustalonej



Rys. 6

wartości współrzędnej x jest liniowy (funkcja $f_1(\eta)$ na rys. 5) niezależnie od kształtu szczeliny. Profil ten jest identyczny z profilem przepływu Couette'a między dwiema płaszczyznami, z których jedna jest nieruchoma, a druga posiada lokalną prędkość równą $\omega R(x)$.

Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkości v_x wynika, że główną jej częścią jest paraboliczny profil płaskiego przepływu Poiseuille'a (funkcja $f_2(\eta)$ na rys. 5) uwarunkowany istnieniem wspomnianej wyżej różnicy ciśnień i ruchem wirowym powierzchni wewnętrznej.

Na główną część składowej prędkości wzdłużnej nakłada się przepływ wtórny, wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni wewnętrznej. Powierzchnia wewnętrzna zasysa w swoim sąsiedztwie ciecz wywołując jej ruch wzdłużny odśrodkowy. Ruch ten musi być równoważony ruchem wzdłużnym dośrodkowym przy powierzchni zewnętrznej i ruchem poprzecznym określonym składową v_y prędkości. Przepływ wtórny opisany jest drugim składnikiem prędkości v_x i prędkością v_y; profile przepływu wtórnego reprezentowane funkcjami $f_3(\eta)$ oraz $f_4(\eta)$ pokazano na rys. 5 i rys. 6.

Dla szczeliny o zmiennej grubości profil prędkości v_y, związanej z omówionym wyżej przepływem wtórnym, ulega zmianom określonym funkcjami $f_5(\eta)$ i $f_6(\eta)$ pokazanymi na rys. 6.

Rozkład ciśnień wzdłuż tworzącej powierzchni symetrii szczeliny — niezależnie od rodzaju i kształtu szczeliny — daje się przedstawić w postaci sumy dwóch składowych: pierwszej — wywołanej ssącym działaniem wirującej powierzchni i drugiej — będącej skutkiem istnienia przepływu wzdłużnego. Wynikiem dodawania tych składowych może być istnienie podciśnień wewnątrz szczeliny.

Wnioski o podobnym charakterze jakościowym wynikają z analizy wzorów wyprowadzonych w p. 2 pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. W. RICE, *An Analytical and Experimental Investigation of Multiple Disk Pumps and Compressors*, J. Eng. for Power, Trans. ASME, Series A, 3, **85** (1963), 191–200.
2. T. VANNERUS, *Rotierende Scheiben für Luftvorwärmer mit geblasen-wirkung*, Allg. Wärmetechn., 6 (1955), 251–262.
3. W. RICE, *An Analytical and Experimental Investigation of Multiple Disk Turbines*, J. Eng. for Power, Trans. ASME, Series A, 1, **87** (1965), 29–36.
4. J.-L. PEUBE, F. KREITH, *Écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques parallèles en rotation*, J. Mécanique, 2, **5** (1966), 260–281.
5. F. KREITH, H. VIVIAND, *Laminar Source Flow Between Two Parallel Coaxial Disks Rotating at Different Speeds*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 3, **34** (1967), 541–547.
6. L. MATSCH, W. RICE, *An Asymptotic Solution for Laminar Flow of an Incompressible Fluid Between Rotating Disks*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 1, **35** (1968), 155–159.
7. K. E. BOYD, W. RICE, *Laminar Inward Flow of an Incompressible Fluid Between Rotating Disks with Full Periphera Admission*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 2, **35** (1968), 229–237.
8. R. G. ADAMS, W. RICE, *Experimental Investigation of the Flow Between Corotating Disks*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 3, **37** (1970), 844–849.
9. W. RICE, K. W. MCALISTER, *Laminar Throughflow of Newtonian Fluid Between Coaxial Rotating Cones*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 1, **37** (1970), 210–212.
10. A. SZANIAWSKI, *Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego*, Prace IPPT PAN 15 (1970).
11. K. W. MCALISTER, W. RICE, *Throughflows Between Rotating Surfaces of Revolution, Having Similarity Solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 4, **37** (1970), 924–930.
12. А. И. ГОЛУБЕВ, *Современные уплотнения вращающихся валов*, Москва 1963.

13. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, В. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ч. II, Москва 1963.
14. Л. А. Дорфман, *Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел*, Москва 1960.

Резюме

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

В работе выведены формулы определяющие такие параметры ламинарного стационарного течения вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения, как составляющие скорости v_x, v_θ, v_y и давление p.

Применяются линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости для осе-симметричного течения в системе криволинейных координат x, θ, y.

Полученные решения уравнений движения проиллюстрированы примерами течения в зазоре постоянной толщины между вращающейся и неподвижной конусными поверхностями, а также между вращающейся и неподвижной сферическими поверхностями. Рассмотрено также течение в зазоре переменной толщины, образующемся между конусными поверхностями с разными углами наклона.

Summary

FLOW OF VISCOUS FLUID BETWEEN ROTATING SURFACES OF REVOLUTION

This paper contains formulae which define such parameters of the steady laminar flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution as the velocity components v_x, v_θ, v_y and pressure p.

The linearized equations of motion of the viscous fluid flow for axial symmetry in the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system x, θ, y are used.

The solutions of the equations of motion have been illustrated by examples of fluid flow through the slot of stable thickness between rotating and fixed conical surfaces, and between rotating and fixed spherical surfaces.

The flow through the slot of variable thickness formed by conical surfaces with various angles of divergence has also been examined.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1973 r.