MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

WSPÓŁRZĘDNE NORMALNE W ANALIZIE REZONANSÓW GŁÓWNYCH NIELINIOWYCH UKŁADÓW DRGAJĄCYCH O WIELU STOPNIACH SWOBODY

WANDA SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA (WARSZAWA)

W liniowych układach drgających o wielu stopniach swobody pojęcie postaci własnych i związanych z nimi współrzędnych normalnych gra istotną rolę przy badaniu drgań wymuszonych i samowzbudnych. Jak wiadomo, przy użyciu tych współrzędnych równania ruchu układu konserwatywnego o skończonej lub nieskończonej ilości stopni swobody dadzą się przedstawić w postaci równań wzajemnie niezależnych

$$M_{0j}\cdot\ddot{\xi}_{0j}+M_{0j}\cdot\omega_{0j}^{2}\cdot\xi_{0j} = Q_j(t),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie ω_{0j} — częstość własna, M_{0j} — uogólniona masa, $Q_j(t)$ — uogólniona siła j-tej postaci drgań, n — liczba stopni swobody układu, ξ_{0j} — j-ta współrzędna normalna związana ze współrzędnymi x_i (x_i — wychylenie masy m_i od położenia równowagi) za pomocą liniowej transformacji

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{0ij}\xi_{0j},$$

gdzie: b_{0ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$ — j-ta postać własna.

Współrzędne ξ_{0j} umożliwiają posługiwanie się rozprzężonymi równaniami ruchu, a przede wszystkim umożliwiają operowanie układem o zredukowanej liczbie stopni swobody przy zapewnieniu dużej dokładności obliczeń. Jest to szczególnie korzystne przy badaniu drgań samowzbudnych układów ciągłych, np. wiszących mostów, powierzchni nośnych samolotów itp., gdyż wyniki doświadczeń i obliczeń pozwoliły stwierdzić, że w drganiach tych «bierze udział» tylko kilka pierwszych postaci drgań. Tak więc układ ciągły zastępujemy układem zredukowanym do kilku, najczęściej dwóch stopni swobody, to jest do dwóch równań. Podobne uproszczenie polegające na odrzuceniu współrzędnych ξ_{0j} odpowiadających wyższym częstościom własnym daje bardzo dobre rezultaty przy badaniu drgań wymuszonych.

Wobec dużych trudności pojawiających się przy analizie drgań układów z charakterystyką nieliniową powstało pytanie, jak z możliwie dużą dokładnością przenieść zastosowanie tego rodzaju uproszczeń na te układy.

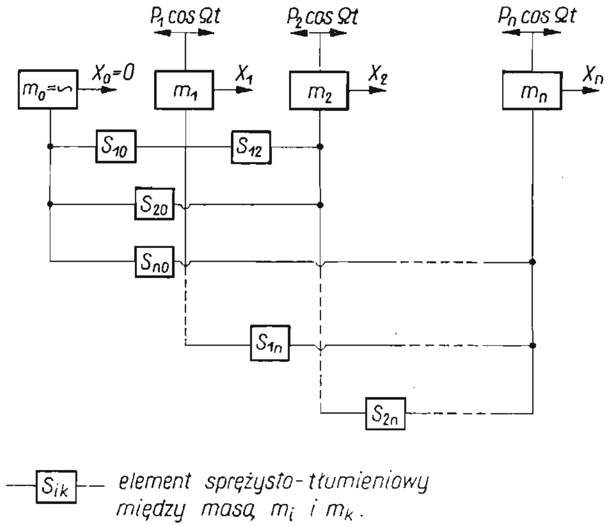
W niniejszej pracy zbadamy dwie drogi podejścia do tego zagadnienia:

1) przez zastosowanie liniowych współrzędnych normalnych i zaniedbanie ich sprzężenia,

2) przez zastosowanie tzw. nieliniowych współrzędnych normalnych zdefiniowanych w pracy [1].

1. Model mechaniczny i równania ruchu układu

Niech modelem rozważanego układu będzie n skupionych mas połączonych ze sobą i z masą $m_0 = \infty$ za pomocą nieważkich sprężyn i elementów rozpraszających energię (rys. 1).



Rys. 1. Model mechaniczny układu o n stopniach swobody

Równania ruchu we współrzędnych x_i, gdzie x_i — wychylenie masy m_i od położenia równowagi, mogą być zapisane następująco:

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} S_{ik}(x_i - x_k, \dot{x}_i - \dot{x}_k) - \overline{P}_i \cos \overline{\Omega} t = 0, \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \dots n,$$

S_{ik} — siła oddziaływania między masą m_i i m_k.

Po wydzieleniu z siły sprężystej części liniowo zależnej od odkształcenia sprężyny równania (1.1) przybiorą postać

$$\varepsilon_i \equiv m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(x_i - x_k) + \mu f_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_i, \dots, \dot{x}_n) - \overline{P}_i \cos \overline{\Omega} t = 0. \tag{1.2}$$

O funkcji f_i założymy, że dla rozwiązania harmonicznego

$$x_i = r_i \cos(\overline{\Omega} t - \varphi_i) \tag{1.3}$$

można ją przedstawić w postaci szeregu Fouriera

(1.4) $$f_i = p_0^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{R} (p_\nu^{(i)} \cos\nu\theta + g_\nu^{(i)} \sin\nu\theta).$$

Oznaczając przez $\omega_{0j}, j = 1, 2, \ldots, n$ częstości własne, a przez $b_{0ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ — postacie własne układu zlinearyzowanego, liniowe współrzędne normalne ξ_{0j} wprowadzimy za pomocą transformacji

(1.5) $$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{0ij}\xi_{0j}.$$

Dzięki własności ortogonalności postaci własnych równania (1.2) przekształcimy do postaci

(1.6) $$\check{\varepsilon}_j \equiv M_{0j}\ddot{\xi}_{0j} + M_{0j}\omega_{0j}^2\xi_{0j} + \mu F_j(\xi_{01}, \ldots \xi_{0n}, \dot{\xi}_{01}, \ldots \dot{\xi}_{0n}) - \bar{Q}_{0j}\cos\bar{\Omega}t = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie

(1.7) $$M_{0j} = \sum_{i=1}^{n} m_i b_{0ij}^2, \quad \bar{Q}_{0j} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i b_{0ij}, \quad F_j = \sum_{i=1}^{n} f_i b_{0ij}.$$

Funkcje F_j, podobnie jak f_i dla rozwiązania harmonicznego, przedstawimy w postaci szeregu Fouriera

(1.8) $$F_j = P_0^{(j)} + \sum_{\nu=1}^{R} (P_\nu^{(j)} \cos\nu\theta + G_\nu^{(j)} \sin\nu\theta).$$

Równania ruchu we współrzędnych normalnych ξ_{0j} dla układu nieliniowego są więc nadal sprzężone przez nieliniową funkcję F_j.

Przypomnijmy najpierw podstawowe cechy układu zlinearyzowanego konserwatywnego ($F_j = 0$). Rozwiązanie równań ruchu (1.6) dla $F_j = 0$ daje nam od razu

(1.9) $$\xi_{0j} = a_{0j}\cos\bar{\Omega}t, \quad a_{0j} = \frac{\bar{Q}_{0j}}{M_{0j}(\omega_{0j}^2 - \bar{\Omega}^2)};$$

a stąd otrzymujemy współrzędne x_i za pomocą (1.5)

(1.10) $$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{0ij}\bar{Q}_{0j}\cos\bar{\Omega}t}{M_{0j}(\omega_{0j}^2 - \bar{\Omega}^2)} = \sum_{j=1}^{n} b_{0ij}\xi_{0j}.$$

Rozwiązanie w tej postaci doskonale ilustruje zjawisko rezonansu i rolę współrzędnych normalnych. Widzimy, że gdy $\Omega \to \omega_{0s}$, to amplituda drgań układu dąży do nieskończoności, ale spośród współrzędnych ξ_{0j} tylko jedna ξ_{0s} dąży do nieskończoności, a amplitudy wszystkich pozostałych «nierezonansowych» współrzędnych przybierają pewne ograniczone wartości. Zatem w pobliżu rezonansu można pominąć współrzędne «nierezonansowe» i rozpatrywać tylko jeden stopień swobody związany ze współrzędną «rezonansową»

(1.11) $$x_i \underset{\Omega \to \omega_{0s}}{\to} b_{0is}\xi_{0s}.$$

Postać drgań układu w pobliżu rezonansu dąży zatem do postaci własnej b_{0is}. Rozważania te są w przybliżeniu słuszne i dla układu tłumionego, jeśli tylko tłumienie jest na tyle małe, że maksymalna amplituda a_{0s} jest dostatecznie duża w porównaniu z $a_{0j}, j \neq s$.

Postać równań ruchu układu nieliniowego (1.6), w którym sprzężenie jest tylko poprzez «mały» nieliniowy człon μF_j nasuwa zrozumiałą chęć zastosowania uproszczenia polegającego na zaniedbaniu tego sprzężenia i rozpatrywaniu równań ruchu w postaci

$$M_{0j}\ddot{\xi}_{0j}+M_{0j}\omega_{0j}^2\xi_{0j}+\mu F_j(\xi_{0j},\dot{\xi}_{0j})-\bar{Q}_{0j}\cos\bar{\Omega}t = 0. \tag{1.12}$$

Uproszczenie to wynika również z samej procedury szeroko stosowanej w literaturze metody uśrednienia [4].

We wcześniejszej pracy [2] analizowany był efekt sprzężenia współrzędnych ξ_{01}, ξ_{02} na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody za pomocą metod teoretycznych oraz za pomocą maszyny analogowej. Ponadto w pracy [3] badane były analityczne metody przybliżone stosowane przy analizie drgań ustalonych układów nieliniowych o n stopniach swobody, a w pracy [1] wprowadzono i zdefiniowano pojęcie nieliniowych współrzędnych normalnych i zbadano zachowanie się tych współrzędnych w pobliżu rezonansu.

Podsumowując rezultaty tych prac należy stwierdzić, że w pobliżu rezonansów głównych dominują drgania harmoniczne o częstości siły wymuszającej $\bar{\Omega}$, a więc przybliżone rozwiązanie można założyć w postaci

$$x_i = r_i(\cos\bar{\Omega}t-\varphi_i),$$

przy czym największą dokładność przy stosunkowo dużych wartościach amplitud uzyskamy, gdy współczynniki r_i, φ_i określimy za pomocą metody Ritza.

2. Liniowe współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych układu nieliniowego

W oparciu o rozwiązania harmoniczne uzyskane metodą Ritza zbadajmy zachowanie się współrzędnych ξ_{0j} przy uwzględnieniu ich sprzężenia w równaniach (1.6) oraz przy zaniedbaniu tego sprzężenia (1.12).

Zakładamy rozwiązanie w postaci

$$\xi_{0j} = a_{0j}(\cos\bar{\Omega}t-\vartheta_j). \tag{2.1}$$

Równania Ritza, z których wyznaczymy nieznane współczynniki a_{0j}, ϑ_j zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \check{\varepsilon}_j(t)\cdot\cos\bar{\Omega}t\, d(\bar{\Omega}t) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\\ &\int_0^{2\pi} \check{\varepsilon}_j(t)\cdot\sin\bar{\Omega}t\, d(\bar{\Omega}t) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie $\check{\varepsilon}_j(t)$ — «pozostałości» równań (1.6) po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania (2.1). W przypadku układu zachowawczego możemy od razu przyjąć $\vartheta_j = 0$ i równania (2.2) przybierają postać

$$a_{0j}M_{0j}(\omega_{0j}^2-\bar{\Omega}^2)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu F_j(a_{01}\cos\bar{\Omega}t, \ldots\, a_{0n}\cos\bar{\Omega}t)\cos\bar{\Omega}t\, d(\bar{\Omega}t)-\bar{Q}_{0j} = 0, \tag{2.3}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

lub, uwzględniając oznaczenia wzoru (1.8),

$$a_{0j}M_{0j}(\omega_{0j}^2-\bar{\Omega}^2)+P_1^{(j)}(a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n})-\bar{Q}_{0j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Rozważmy teraz rezonans, przy którym $a_{0s} \to \infty$:

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &M_{0s}(\omega_{0s}^2-\bar{\Omega}^2)+\frac{\mu}{a_{0s}}P_1^{(s)}(a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n}) = \frac{\bar{Q}_{0j}}{a_{0s}}, \\ &M_{0j}\frac{a_{0j}}{a_{0s}}(\omega_{0j}^2-\Omega^2)+\frac{\mu}{a_{0s}}P_1^{(j)}(a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n}) = \frac{\bar{Q}_{0j}}{a_{0s}}, \\ &j = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Przyjmując $Q_{0j}/a_{0s} = 0$ otrzymujemy układ równań jednorodnych z niewiadomymi $a_{01}, a_{02}, \dots a_{0s-1}, a_{0s+1}, \dots a_{0n}$ i Ω. Można wykazać, że w ogólnym przypadku wszystkie amplitudy współrzędnych normalnych dążą do nieskończoności tak, że dla $a_{0s} \to \infty$

$$(2.5)\qquad a_{0j}/a_{0s} \to \text{const},$$

a zatem postać drgań układu przy rezonansie dąży do pewnej wartości b_{is} różnej od liniowej postaci własnej

$$(2.6)\qquad \frac{x_i}{x_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{0ij}a_{0j}}{\sum_{j=1}^{n} b_{01j}a_{0j}} \xrightarrow[a_{0s}\to\infty]{} b_{is} \neq b_{0is}.$$

Natomiast przy zaniedbaniu sprzężenia między $\xi_{01}, \dots, \xi_{0n}$, czyli przy posługiwaniu się uproszczonymi równaniami (1.12), otrzymamy wynik podobny do wyniku dla układu liniowego

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &\xi_{0s} = a_{0s}\cos\bar{\Omega}t = \frac{\bar{Q}_{0s}\cos\bar{\Omega}t}{M_{0s}[\omega_s^2(a_{0s})-\bar{\Omega}^2]}, \\ &x_i \xrightarrow[a_{0s}\to\infty]{} b_{0is}\xi_{0s}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.8)\qquad \omega_s(a_{0s}) = \omega_{0s}+\mu A_1(a_{0s}) = \omega_{0s}+\frac{\mu P_s^{(s)}(a_{0s})}{2a_{0s}M_{0s}}$$

i w rezultacie postać drgań przy rezonansie nie ulega zmianie

$$x_i/x_1 \xrightarrow[a_{0s}\to\infty]{} b_{0is}.$$

3. Nieliniowe współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych

Rozszerzmy teraz pojęcie częstości i postaci własnych na układ nieliniowy. Drgania główne nieliniowego układu autonomicznego zakładamy w postaci funkcji harmonicznej

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &x_i = a_{ij}\cos\omega_j t = a_j b_{ij}\cos\omega_j t, \\ &i, j = 1, 2, \dots, n, \quad b_{1j} = 1. \end{aligned}$$

Podobnie jak w układzie liniowym, wielkości ω_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, nazywamy częstościami własnymi, a współczynniki b_{ij}, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — postaciami własnymi układu. Wielkości te są funkcjami amplitudy

$$\omega_j = \omega_j(a_j), \qquad b_{ij} = b_{ij}(a_j),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

a określimy je z równań Ritza

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon_i(t)\cos\omega t\, d(\omega t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.2}$$

gdzie $\varepsilon_i(t)$ — «pozostałości» równań ruchu (1.2) po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania (3.1). Uczynimy założenie, że w rozpatrywanym zakresie parametrów wszystkie częstości ω_j i postacie własne b_{ij} przybierają różne wartości.

Zbadajmy teraz zachowanie się układu nieliniowego zachowawczego przy rezonansie zakładając, że częstość siły wymuszającej może zbliżyć się nieograniczenie do częstości własnej ω_s.

Podstawiając do równań ruchu rozwiązanie w postaci $x_i = r_i \cos\bar{\Omega}t$ i stosując metodę Ritza otrzymujemy równanie z niewiadomymi $r_1, r_2, \ldots, r_n$,

$$-m_i\Omega^2 r_i + \sum_{k=0}^{n} K_{ik}(r_i - r_k) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu f_i(r_1\cos\bar{\Omega}t, \ldots r_n\cos\bar{\Omega}t)\cos\bar{\Omega}t\, d(\bar{\Omega}t) = \bar{P}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Po podzieleniu stronami przez r_s otrzymujemy

$$-m_i\bar{\Omega}^2\frac{r_i}{r_s} + \sum_{k=0}^{n} K_{ik}\frac{r_i - r_k}{r_s} + \frac{1}{\pi r_s}\int_0^{2\pi} \mu f_i \cos\bar{\Omega}t\, d(\bar{\Omega}t) = \frac{P_i}{r_s}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Zakładając, że przy rezonansie r_s przybiera wartości tak duże, że P_i/r_s możemy traktować jako bliskie zeru, otrzymujemy układ równań jednorodnych jak dla układu autonomicznego. Jedynymi rozwiązaniami harmonicznymi układu autonomicznego są rozwiązania (3.1) przedstawiające drgania główne o częstościach własnych ω_j i postaciach własnych b_{ij}. Zatem przy rezonansie, gdy $r_s \to \infty$, układ drga w pobliżu nieliniowych drgań głównych $\bar{\Omega} \to \omega_s$ i postać drgań układu dąży do b_{is}, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Widzimy więc, że drgania układu w pobliżu rezonansu możemy opisać za pomocą jednej współrzędnej związanej z nieliniową postacią własną

$$x_i \approx b_{is}(a_s)\xi_s. \tag{3.4}$$

Jeżeli to rozwiązanie podstawimy do równań ruchu (1.2), a następnie pomnożymy każde z równań przez odpowiednie b_{ij} i dodamy wszystkie razem, otrzymamy

$$\ddot{\xi}_s \sum_{i=1}^{n} m_i b_{is}^2 + \xi_s \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{n} K_{ik}(b_{is} - b_{ks})\Big] b_{is} + \sum_{i=1}^{n} b_{is}\mu f_i - \sum_{i=1}^{n} b_{is}\bar{P}_i\cos\bar{\Omega}t = 0. \tag{3.5}$$

Opierając się na rozwiązaniu harmonicznym $\xi_s = a_s \cos\bar{\Omega}t$, co przy drganiach swobodnych sprowadza się do $\xi_s = a_s \cos\omega_s t$, dochodzimy za pomocą równań Ritza do wniosku, że spełniona jest zależność

$$\xi_s \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} K_{ik}(b_{is}-b_{ks})b_{is} + \sum_{i=1}^{n} b_{is}\mu f_i = \xi_s M_s \omega_s^2,$$

gdzie ω_s — częstość własna układu nieliniowego będąca funkcją amplitudy, a $M_s = \sum_{i=1}^{n} m_i b_{is}^2$ — uogólniona masa s-tej postaci, będąca również funkcją amplitudy.

Równanie (3.5) przybiera zatem postać

$$M_s \ddot{\xi}_s + \omega_s^2 M_s \xi_s = Q_s \cos\bar{\Omega}t, \tag{3.6}$$

a stąd rozwiązanie

$$\xi_s = a_s \cos\bar{\Omega}t = \frac{\bar{Q}_s \cos\bar{\Omega}t}{M_s(\omega_s^2-\Omega^2)}. \tag{3.7}$$

Równanie (3.7) opisuje «odpowiedź» układu na działanie sił wymuszających $\bar{P}_i \cos\bar{\Omega}t$ pod warunkiem, że występuje tylko jedna s-ta postać ruchu. Współrzędne ξ_s spełniające te równania nazywać będziemy nieliniowymi współrzędnymi normalnymi. Spełniają one warunek, że przy rezonansie dominuje tylko jedna, rezonansowa współrzędna, a pozostałe przybierają ograniczone wartości. Nie wiemy jednak jak wyraża się ogólne rozwiązane x_i w funkcji tak zdefiniowanych współrzędnych, gdyż jak wiadomo, w układzie nieliniowym nie jest słuszne prawo superpozycji. Skoro w układach liniowych między x_i i ξ_{0j} zachodziła zależność liniowa (1.5), w układzie nieliniowym może to być jakaś zależność nieliniowa

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n).$$

Zagadnienie to zostało rozwiązane w pracy [1] dla pewnego szczególnego układu o n stopniach swobody posiadającego tzw. graniczne częstości własne. Wykazano między innymi, że wielkość błędu wynikająca z odrzucenia współrzędnych «nierezonansowych» $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots \xi_n$ przy $\Omega \to \omega_s$ jest większa niż w układach liniowych, mianowicie, że człon odrzucany dąży do nieskończoności, lecz do nieskończoności niższego rzędu niż współrzędna rezonansowa:

$$\begin{gathered} x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\xi_j + \Delta x_i(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n); \\ x_i \underset{\bar{\Omega}\to\omega_s}{\longrightarrow} b_{is}a_s \cos\bar{\Omega}t + \alpha_i \cos\Omega t \\ \text{oraz} \quad \alpha_i \to \infty, \quad \text{lecz } \frac{\alpha_i}{a_s b_{is}} \underset{\bar{\Omega}\to\omega_s}{\longrightarrow} 0, \end{gathered} \tag{3.8}$$

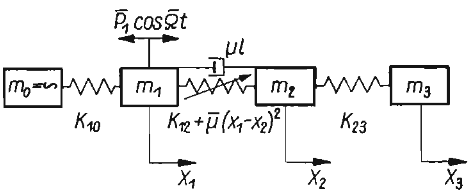
a więc ostatecznie

$$x_i \underset{\bar{\Omega}\to\omega_s}{\longrightarrow} b_{is}\xi_s.$$

W niniejszej pracy przedstawiony jest jeden z praktycznych aspektów powyższych rozważań, mianowicie sprawa oceny maksymalnej amplitudy przy rezonansach i wpływania na charakterystykę tłumienia przez odpowiednie umieszczenie elementu tłumiącego. Zauważmy bowiem, że gdy element tłumiący znajduje się między masą m_i i m_k, to siła tłumienia zależy od różnicy amplitud tych mas, a więc od amplitudy jednej z nich i postaci drgań. Jeżeli w wyniku nieliniowej charakterystyki sprężyn postać drgań ulega zmianie ze wzrostem amplitudy, ulegnie również zmianie efektywność elementu tłumiącego, co szczególnie rzutuje na maksymalne amplitudy przy rezonansach. Stąd nasuwa się przypuszczenie, że metoda obliczeń nie uwzględniająca zmian postaci drgań, a więc i metoda polegająca na pominięciu sprzężenia między liniowymi współrzędnymi normalnymi, może dawać niedokładne wyniki.

4. Badanie rezonansów głównych układu o trzech stopniach swobody

Zagadnienie rozpatrzmy szczegółowo na przykładzie układu drgającego o trzech stopniach swobody przedstawionego na rys. 2. Dla uproszczenia obliczeń przyjęto, że tylko jedna sprężyna ma charakterystykę nieliniową sztywniejącą typu x^3. Układ zaopatrzony jest w jeden element tłumiący o charakterystyce liniowej i jest wzbudzany siłą harmoniczną $\bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} t$.



Rys. 2. Model mechaniczny układu o trzech stopniach swobody

Równania ruchu układu przy umieszczeniu tłumika między masą m_1 i m_2 są następujące:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + K_{10}x_1 + K_{12}(x_1-x_2) + \bar{\mu}(x_1-x_2)^3 + \bar{\mu}l\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = \bar{P}_1 \cos\bar{\Omega}t, \\
(4.1) \quad & m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + K_{12}(x_2-x_1) + K_{23}(x_2-x_3) - \bar{\mu}(x_1-x_2)^3 - \bar{\mu}l\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = 0, \\
& m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} + K_{23}(x_3-x_2) = 0,
\end{aligned}
$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$
\begin{aligned}
& \gamma_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + C_{10}x_1 + C_{12}(x_1-x_2) + \mu(x_1-x_2)^3 + \mu l\left(\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_2}{d\tau}\right) = P_1 \cos\Omega\tau, \\
(4.2) \quad & \gamma_2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + C_{12}(x_2-x_1) + C_{23}(x_2-x_3) - \mu(x_1-x_2)^3 - \mu l\left(\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_2}{d\tau}\right) = 0, \\
& \gamma_3 \frac{d^2x_3}{d\tau^2} + C_{23}(x_3-x_2) = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\gamma_i = \frac{m_i}{m_1}, \quad C_{ik} = \frac{K_{ik}}{K_{10}}, \quad \Omega = \bar{\Omega}\sqrt{\frac{m_1}{K_{10}}},$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{K_{10}}{m_1}}, \quad P_1 = \frac{\bar{P}_1}{K_{10}}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{K_{10}}.$$

Zastępując drugie równanie przez sumę równania pierwszego i drugiego otrzymamy układ, w którym wyraz nieliniowy występuje tylko w jednym równaniu:

$$\gamma_1\frac{d^2x_1}{d^2} + C_{10}x_1 + C_{12}(x_1-x_2) + \mu(x_1-x_2)^3 + \mu l\left(\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_2}{d\tau}\right) = P_1\cos\Omega\tau,$$

(4.3) $$\gamma_1\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \gamma_2\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + C_{10}x_1 + C_{23}(x_2-x_3) = P_1\cos\Omega\tau,$$

$$\gamma_3\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + C_{23}(x_3-x_2) = 0.$$

Zakładając dla układu autonomicznego rozwiązanie

(4.4) $$\begin{aligned} x_1 &= a\cos\omega t, \\ x_2 &= ab_2\cos\omega t, \\ x_3 &= ab_3\cos\omega t, \end{aligned}$$

częstości własne w funkcji amplitudy a znajdziemy z wyznacznika charakterystycznego

(4.5) $$D(\omega^2, a^2) = \begin{vmatrix} -\gamma_1\omega^2 + C_{10} + C_{12} + \varkappa(a^2), & -C_{12}, & 0 \\ -\gamma_1\omega^2 + C_{10}, & -\gamma_2\omega^2 + C_{23}, & -C_{23} \\ 0, & -C_{23}, & -\gamma_3\omega^2 + C_{23} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie:

$$\varkappa(a^2) = \frac{3}{4}\mu a^2(1-b_2)^3.$$

Postacie własne znajdziemy za pomocą dopełnień algebraicznych wyznacznika $D(\omega^2, a^2)$,

$$b_{ij} = \left(\frac{D_{si}}{D_{s1}}\right)_{\omega=\omega_j}.$$

Wybierając $s = 1$ otrzymamy b_{ij} jako funkcje częstości ω_j

(4.6) $$b_{2j} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1\omega_j^2 - C_{10}, & -C_{23} \\ 0 & -\gamma_3\omega_j^2 + C_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_2\omega_j^2 + C_{23}, & -C_{23} \\ -C_{23}, & -\gamma_3\omega_j^2 + C_{23} \end{vmatrix}}; \quad b_{3j} = \frac{b_{2j}C_{23}}{-\gamma_3\omega_j^2 + C_{23}}.$$

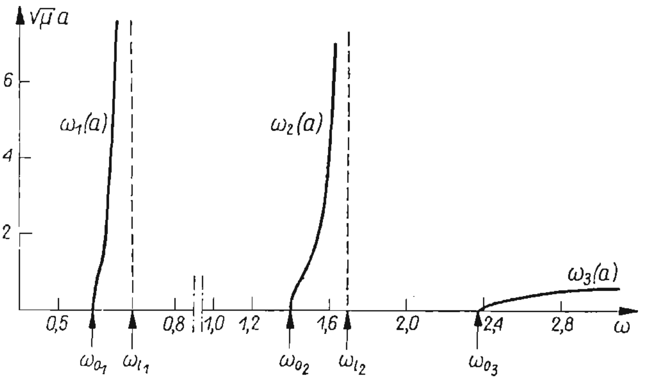
Przy amplitudzie a dążącej do nieskończoności, dwie niższe częstości własne dążą do pewnych wartości granicznych $\omega_{11m\,1}$, $\omega_{11m\,2}$ równych częstościom własnym układu, w którym masy m_1 i m_2 są ze sobą sztywno połączone. Częstości te obliczymy z wyznacznika

$$D_{11m} = \begin{vmatrix} -\omega^2(\gamma_1+\gamma_2)+C_{10}+C_{23} & -C_{23} \\ -C_{23} & -\gamma_3\omega^2+C_{23} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

Spełniają one warunek

$$\omega_{01} < \omega_{11m\,1} < \omega_{02} < \omega_{11m\,2} < \omega_{03}.$$

Trzecia, najwyższa częstość własna dąży do nieskończoności ze wzrostem amplitudy (rys. 3). Dla obliczonych z (4.7) częstości granicznych za pomocą wzorów (4.6) obliczamy odpowiednie graniczne postacie własne.



Rys. 3. Krzywe częstości własnych w funkcji amplitudy

Dla przykładu liczbowego scharakteryzowanego parametrami

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0{,}5, \quad \gamma_3 = 0{,}5,$$
$$C_{10} = 1, \quad C_{12} = 1, \quad C_{23} = 1,$$

częstości i postacie własne są następujące:

1. postać	2. postać	3. postać
$\omega_{01} = 0{,}592$,	$\omega_{02} = 1{,}41$,	$\omega_{03} = 2{,}38$,
$b_{021} = 1{,}65$,	$b_{022} = 0{,}0$,	$b_{023} = -3{,}64$,
$b_{031} = 2{,}0$,	$b_{032} = -1{,}0$,	$b_{033} = 2{,}0$,
$\omega_{11m\,1} = 0{,}685$,	$\omega_{11m\,2} = 1{,}70$,	$\omega_{l3} \to \infty$
$b_{l21} = 1{,}0$,	$b_{l22} = 1{,}0$,	$b_{l23} = -\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = -2{,}0$,
$b_{l31} = 1{,}3$,	$b_{l32} = -2{,}3$,	$b_{l33} = 0$.

Zbadajmy pierwszy rezonans posługując się dwiema metodami:

1) metodą nieliniowych współrzędnych normalnych redukujących układ w pobliżu rezonansu do jednego stopnia swobody określonego przez nieliniową postać własną b_{l1};

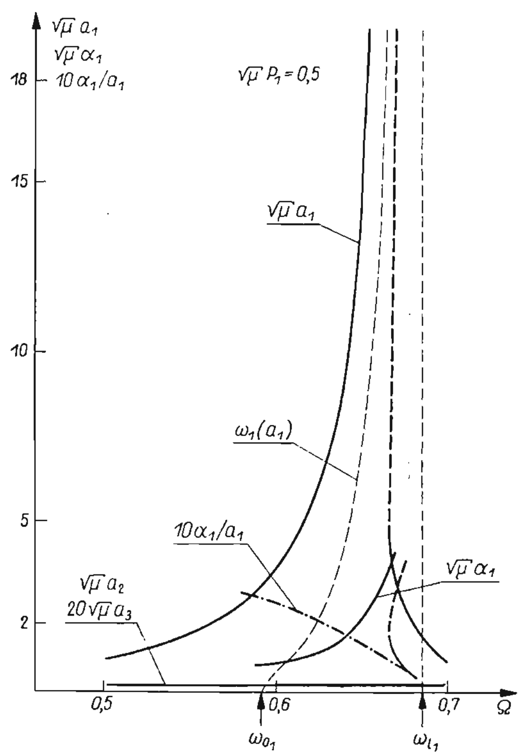
2) metodą zaniedbania sprzężenia między współrzędnymi normalnymi ξ_{01}, ξ_{02}, ξ_{03}, tj. metodą redukującą układ do jednego stopnia swobody określonego przez liniową postać własną b_{0i1}.

4.1. Analiza pierwszego rezonansu za pomocą nieliniowych współrzędnych normalnych. Zgodnie z (3.6) nieliniowe współrzędne normalne spełniają rozprzężone równania ruchu i dla układu nietłumionego amplitudę a_1 obliczamy z zależności

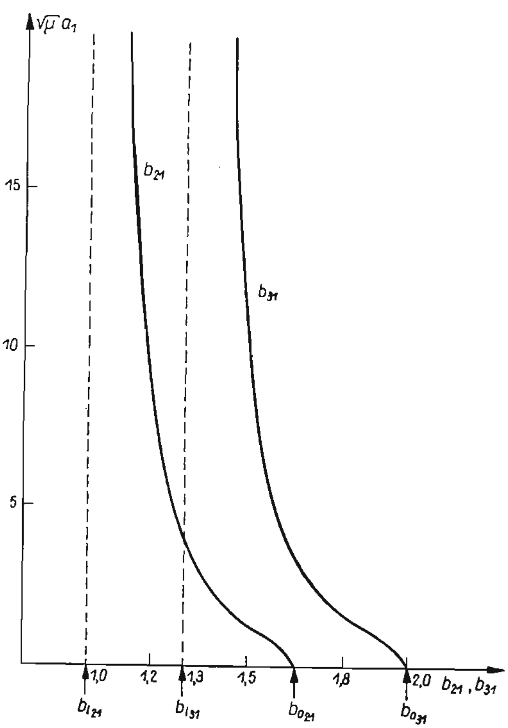
$$a_1 = \frac{P_1}{M_1[\omega_1^2(a_1)-\Omega^2]}, \tag{4.8}$$

gdzie $M_1 = 1+\gamma_2 b_{21}^2+\gamma_3 b_{31}^2$.

Częstość własną $\omega_1(a_1)$ i współczynniki postaci własnej $b_{21}(a_1)$ i $b_{31}(a_1)$ znajdujemy za pomocą wzorów (4.5) i (4.6).



Rys. 4. Krzywe rezonansowe nieliniowych współrzędnych normalnych w pobliżu pierwszego rezonansu



Rys. 5. Współczynniki pierwszej postaci własnej b_{21}, b_{31} w funkcji amplitudy

Amplitudy współrzędnych «nierezonansowych» a_2 i a_3 są na tyle małe, że obliczymy je jak dla układu liniowego

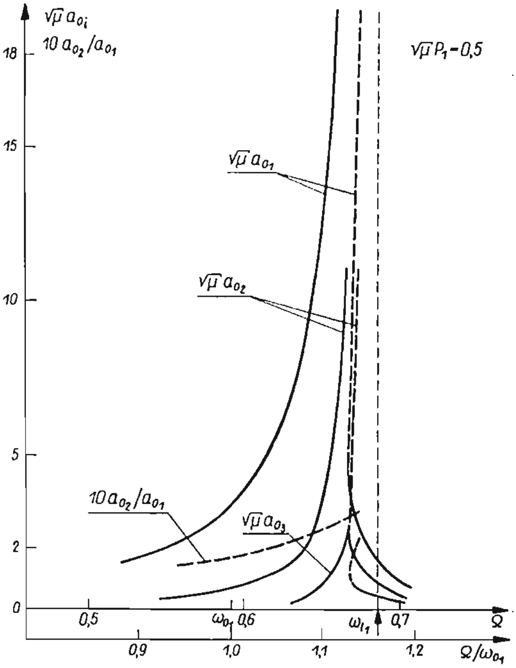
$$a_2 = \frac{P_1}{M_{02}(\omega_{02}^2-\Omega^2)}, \quad a_3 = \frac{P_1}{M_{03}(\omega_{03}^2-\Omega^2)}. \tag{4.9}$$

Ponadto za pomocą wzorów wyprowadzonych w pracy [1] obliczymy wielkość członu nieliniowego w transformacji (3.8), czyli wielkość $\alpha_i = \alpha_i(\Omega)$. Wyniki naniesiono na rys. 4 w formie wykresów $a_1 = a_1(\Omega)$, $a_2 = a_2(\Omega)$, $a_3 = a_3(\Omega)$, $\alpha_1 = \alpha_1(\Omega)$ oraz na rys. 5 $b_{21} = b_{21}(a_1)$ i $b_{31} = b_{31}(a_1)$.

Całkowita amplituda masy m_1 wynosi

$$r_1 = a_1 + \alpha_1 + a_2 + a_3.$$

Dwa ostatnie wyrazy a_2 i a_3 przybierają bardzo małe wartości, natomiast a_1 i α_1 dążą do nieskończoności, gdy $\Omega \to \omega_1(a_1)$. Naniesiono również krzywą $\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_1}{a_1}(\Omega)$ pokazując, że zgodnie z ogólną analizą przeprowadzoną w pracy [1] przy rezonansie $\alpha_1/a_1 \to 0$ uzasadnione jest ograniczenie rozważań do współrzędnej rezonansowej $\xi_1 = a_1 \cos \Omega\tau$.



Rys. 6. Krzywe rezonansowe liniowych współrzędnych normalnych w pobliżu pierwszego rezonansu

Przy umieszczeniu tłumika między masą m_1 i m_2 współrzędną ξ_1 określimy z równania

$$M_1 \ddot{\xi}_1 + M_1 \omega_1^2(a_1)\xi_1 + \mu l (1 - b_{21})^2 \dot{\xi}_1 = P_1 \cos \Omega\tau. \tag{4.10}$$

Zakładając rozwiązanie $\xi_1 = a_1 \cos(\Omega t - \vartheta_1)$ i stosując metodę Ritza otrzymamy

$$a_1 \equiv \frac{P_1}{M_1(a_1)\sqrt{[\omega_1^2(a_1) - \Omega^2]^2 + \left[\frac{\mu l (1-b_{21})^2}{M_1(a_1)}\right]^2 \Omega^2}}. \tag{4.11}$$

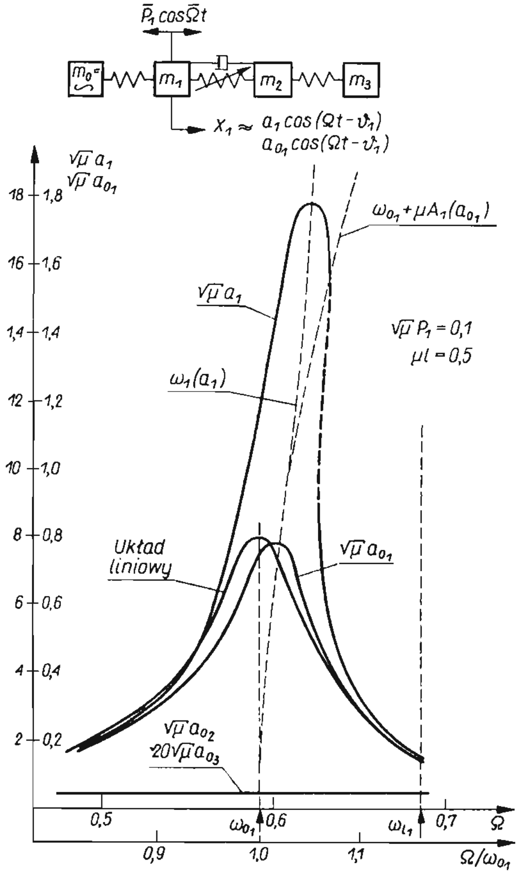
Przy umieszczeniu tłumika między m_2 i m_3 otrzymamy odpowiednio

$$a_1 = \frac{P_1}{M_1(a_1)\sqrt{[\omega_1^2(a_1)-\Omega^2]^2+\left[\frac{\mu l(b_{21}-b_{31})^2}{M_1(a_1)}\right]^2\Omega^2}}. \tag{4.12}$$

Krzywe rezonansowe układu tłumionego w pobliżu pierwszego rezonansu przedstawione są na rys. 7 i 10. Zauważmy, że odpowiednik współczynnika tłumienia

$$\frac{\mu l[1-b_{21}(a_1)]^2}{2M_1(a_1)} = h_{1,2}, \qquad \frac{\mu l(b_{21}-b_{31})^2}{2M_1(a_1)} = h_{2,3} \tag{4.13}$$

jest tutaj funkcją amplitudy, mimo że tłumik ma charakterystykę liniową.



Rys. 7. Krzywe rezonansowe układu tłumionego — tłumik między masą m_1 i m_2

4.2. Analiza pierwszego rezonansu za pomocą liniowych współrzędnych normalnych. Równania ruchu układu we współrzędnych normalnych ξ_{01}, ξ_{02}, ξ_{03} przybierają dla układu nietłumionego postać (2.3)

$$M_{0j}\ddot{\xi}_{0j} + M_{0j}\omega_{0j}^2\xi_{0j} + \mu(1-b_{02j})\left[\sum_{s=1}^{3}\xi_{0s}(1-b_{02s})\right]^3 = P_1\cos\Omega\tau, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{4.14}$$

Zbadajmy zachowanie się tych współrzędnych przy pierwszym rezonansie z uwzględnieniem ich sprzężenia. Równania (2.4), z których wyznaczymy ξ_{02}/ξ_{01} i ξ_{03}/ξ_{01} przybierają postać:

$$\omega_{01}^2-\Omega^2+$$
$$+\frac{3}{4}\frac{\mu(1-b_{021})}{M_{01}}a_{01}^2\left[(1-b_{021})+\frac{a_{02}}{a_{01}}(1-b_{022})+\frac{a_{03}}{a_{01}}(1-b_{023})\right]^3=\frac{P_1}{M_{01}a_{01}},$$

$$\frac{a_{02}}{a_{01}}(\omega_{02}^2-\Omega^2)+$$
$$(4.15)\qquad +\frac{3}{4}\frac{\mu(1-b_{022})}{M_{02}}a_{01}^2\left[1-b_{021}+\frac{a_{02}}{a_{01}}(1-b_{022})+\frac{a_{03}}{a_{01}}(1-b_{023})\right]^3=\frac{P_1}{M_{02}a_{01}},$$

$$\frac{a_{03}}{a_{01}}(\omega_{03}^2-\Omega^2)+$$
$$+\frac{3}{4}\frac{\mu(1-b_{023})}{M_{03}}a_{01}^2\left[1-b_{021}+\frac{a_{02}}{a_{01}}(1-b_{022})+\frac{a_{03}}{a_{01}}(1-b_{023})\right]^3=\frac{P_1}{M_{03}a_{01}}.$$

Zakładając, że $a_{01}\to\infty$ tak, że $\dfrac{P_1}{M_{0j}a_{01}}\to 0$, otrzymamy z (4.15)

$$\frac{a_{02}}{a_{01}}\underset{\Omega\to\omega_1}{\to}0{,}34,\qquad \frac{a_{03}}{a_{01}}\underset{\Omega\to\omega_1}{\to}0{,}0735.$$

Równania (4.15) pozwalają również wykreślić przebieg krzywych rezonansowych. Wyniki obliczeń w postaci wykresów $a_{01}=a_{01}(\Omega)$, $a_{02}=a_{02}(\Omega)$, $a_{03}=a_{03}(\Omega)$ przedstawione są na rys. 6.

Dla układu tłumionego zbadamy współrzędną rezonansową ξ_{01} bez uwzględnienia sprzężenia. Gdy tłumik umieszczony jest między masą m_1 i m_2, współrzędną tę określimy z równania

$$(4.16)\qquad M_{01}\ddot{\xi}_{01}+M_{01}\omega_{01}^2\xi_{01}+\mu(1-b_{021})^4\xi_{01}^3+(1-b_{021})^2\mu l\dot{\xi}_{01}=P_1\cos\Omega\tau.$$

Rozwiązując (4.16) otrzymamy (2.7)

$$(4.17)\qquad \xi_{01}=a_{01}\cos(\Omega t-\vartheta_1)=\frac{P_1\cos(\Omega\tau-\vartheta_1)}{M_{01}\sqrt{[(\omega_{01}+\mu A_1)^2-\Omega^2]^2+\left[\dfrac{\mu l(1-b_{021})^2}{M_{01}}\right]^2\Omega^2}},$$

gdzie

$$(4.18)\qquad A_1=\frac{3}{8}\mu a_{01}^2\frac{(1-b_{021})^4}{M_{01}}.$$

Gdy tłumik umieszczony jest między masą m_2 i m_3, otrzymamy

$$(4.19)\qquad \xi_{01}=a_{01}(\cos\Omega t-\vartheta_1)=\frac{P_1\cos(\Omega\tau-\vartheta_1)}{M_{01}\sqrt{[(\omega_{01}+\mu A_1)^2-\Omega^2]^2+\left[\dfrac{\mu l(b_{021}-b_{031})^2}{M_{01}}\right]^2\Omega^2}}.$$

Wyrażenie $\omega_{01}+\mu A_1(a_{01})$ jest tu częstością własną określoną z dokładnością do wyrazów małych rzędu μ^1

$$\omega_{01}+\mu A_1(a_{01}) = \omega_1(a_{01}).$$

Zatem metoda ta może dać prawidłowe wyniki tylko wtedy, jeżeli $\omega_1(a_{01})$ mało różni się od ω_{01}.

Współczynnik tłumienia h_0

$$\frac{\mu l(b_{0j1}-b_{0i1})^2}{2M_{01}} = h_{0_{j,i}}$$

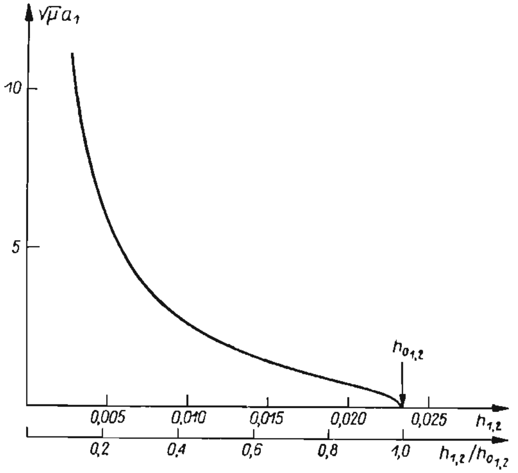
jest w tym przypadku stały, niezależny od amplitudy. Współrzędne «nierezonansowe» ξ_{02}, ξ_{03} bez uwzględnienia sprzężenia pozostają przy rezonansie na tyle małe, że obliczymy je jak dla układu liniowego (4.9).

Krzywe rezonansowe obliczone według (4.17) i (4.18) oraz (4.19) naniesiono na rys. 7 i 10 obok krzywych rezonansowych współrzędnej a_1. Dla porównania wykreślono również krzywe rezonansowe układu liniowego.

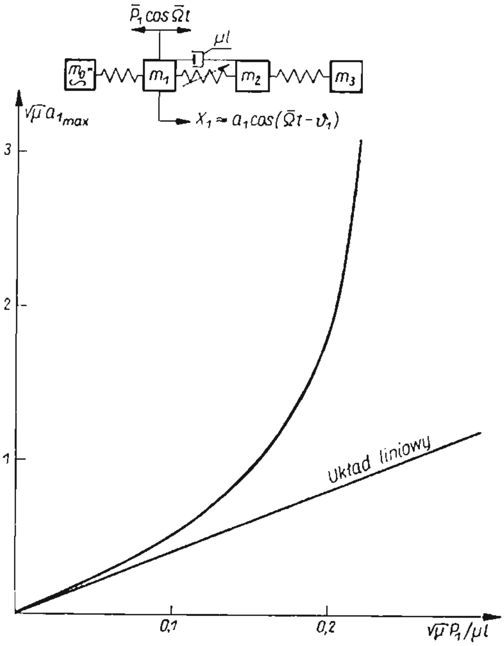
5. Analiza wyników i wnioski

Badanie rezonansów za pomocą równań (1.12), (4.14), a więc za pomocą liniowych współrzędnych normalnych przy zaniedbaniu ich sprzężenia, jest bardzo proste obliczeniowo lecz niesie ze sobą możliwości dużych błędów. Szczególnie jaskrawo jest to widoczne na przykładzie przedstawionym na rys. 7 przy umieszczeniu tłumika równolegle z nieliniową sprężyną między masą m_1 i m_2. Porównanie krzywych rezonansowych układu liniowego i $a_{01} = a_{01}(\Omega)$ układu nieliniowego sugeruje, że w rozpatrywanym zakresie parametrów układ mało odbiega od liniowego, gdyż $(\omega_{01}+\mu A_1)$ mało różni się od ω_{01}, a więc, że wynik ten powinien być bliski rozwiązaniu dokładnemu. W przykładzie tym jednak małym zmianom częstości własnej towarzyszy szybka zmiana postaci własnej b_{21}, b_{31} w funkcji amplitudy, co przy tej metodzie nie jest zupełnie uwzględniane (rys. 5). Te zmiany postaci własnej znajdują odbicie przy metodzie nieliniowej współrzędnej normalnej, tj. krzywej $a_1 = a_1(\Omega)$. Krzywa ta wykazuje około 2,3 razy większą amplitudę przy rezonansie niż to przewiduje wynik poprzedni. Ten wzrost amplitudy jest wywołany zmianą efektywnego współczynnika tłumienia $h_{1,2}$ we wzorach (4.11) i (4.13). Przy metodzie liniowej współrzędnej normalnej [wzór (4.17)] współczynnik $h_{01,2}$ jest stały i niezależny od amplitudy. Przy metodzie nieliniowej współrzędnej normalnej [wzór (4.13)] efektywny współczynnik tłumienia $h_{1,2}$ jest funkcją amplitudy. W rezultacie, mimo że sam tłumik jest liniowy, otrzymujemy nieliniową charakterystykę tłumienia. Dla ilustracji na rys. 8 wykreślono przebieg zmian współczynnika $h_{1,2}$ w funkcji amplitudy a_1, a na rys. 9 — maksymalne amplitudy przy rezonansie w funkcji stosunku siły wymuszającej do parametru tłumienia μl.

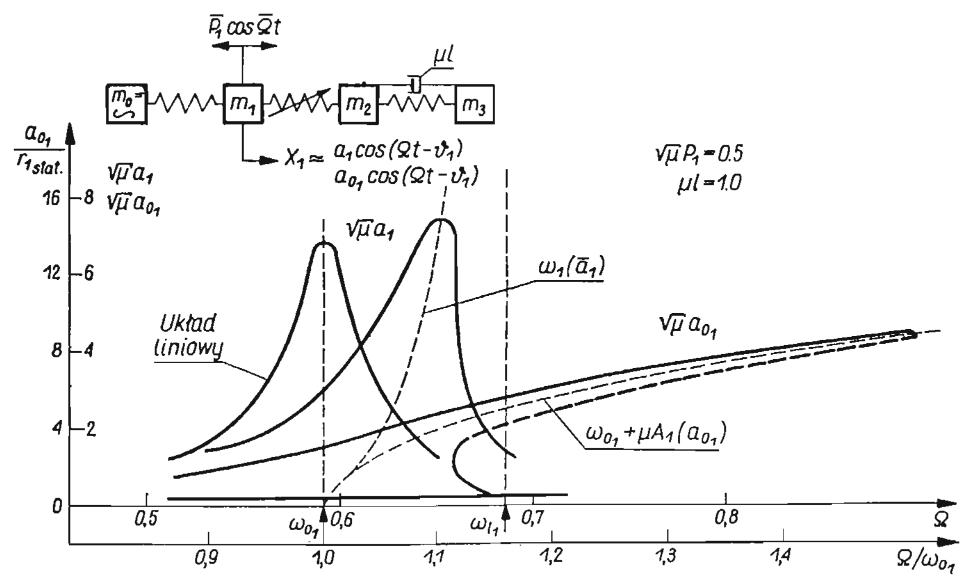
W rezultacie krzywa rezonansowa $a_{01} = a_{01}(\Omega)$ daje błędną ocenę maksymalnej amplitudy przy rezonansie, mimo że jej przebieg (małe odchylenie od ω_{01}) daje podstawy do przypuszczeń, że powinna ona być bliską rozwiązania dokładnego. Nasuwa się tu wniosek, że zakres stosowalności tej metody powinien być kontrolowany nie tylko miarą odchylenia częstości własnej, ale i postaci własnej od odpowiednich wartości liniowych.



Rys. 8. Zmiany efektywnego współczynnika tłumienia $h_{1,2}$ w funkcji amplitudy



Rys. 9. Maksymalna amplituda przy pierwszym rezonansie w funkcji stosunku siły wymuszającej do parametru tłumika μl



Rys. 10. Krzywe rezonansowe układu tłumionego — tłumik między masą m_2 i m_3

Wyniki otrzymane przy umieszczeniu tłumika między masą m_2 i m_3 są przykładem zupełnie odwrotnej sytuacji: przebieg krzywej rezonansowej $a_{01} = a_{01}(\Omega)$ sugeruje, że układ znacznie odbiega od liniowego, gdyż częstość $(\omega_{01}+\mu A_1)$ różni się znacznie od ω_{01}. Wnioskujemy więc od razu, że krzywa ta nie daje prawidłowych rezultatów. Mimo to krzywa rezonansowa nieliniowej współrzędnej normalnej $a_1 = a_1(\Omega)$ daje wyniki nie odbiegające silnie od układu liniowego: zarówno częstość rezonansowa, jak i maksymalna amplituda nie różnią się znacznie od odpowiednich wartości układu liniowego. Wynika to z faktu, że różnica współczynników postaci własnej $(b_{21}-b_{31})$ decydująca o wielkości efektywnego współczynnika tłumienia $h_{2,3}$ (4.11), (4.13) zachowuje wartość prawie stałą w dużym zakresie amplitud, mimo że wartości b_{21} i b_{31} ulegają silnym zmianom (rys. 5).

Przypadek umieszczenia tłumika między m_0 i m_1 nie jest rozpatrywany, gdyż jest od razu jasne, że efektywny współczynnik tłumienia $h_{0,1}$ jest wtedy stały.

Reasumując wady i zalety obu metod należy stwierdzić:

1. Zaniedbanie zmian postaci drgań w funkcji amplitudy poprzez zaniedbanie sprzężenia między liniowymi współrzędnymi normalnymi daje metodę bardzo prostą, ale stwarza duże możliwości otrzymania rezultatów zupełnie błędnych. Stosować ją można tylko w takim zakresie amplitud, w którym i częstości własne i postacie własne ulegają nieznacznym odchyleniom od odpowiednim wartości liniowych.

2. Badanie rezonansu za pomocą nieliniowej współrzędnej normalnej nie stawia ograniczenia na wielkość odchylenia częstości i postaci od wartości liniowych, jest więc słuszne w znacznie większym zakresie amplitud. Metoda ta jest nieco bardziej pracochłonna, ma jednak tę dużą zaletę, że jej dokładność wzrasta nawet ze wzrostem amplitudy (pod warunkiem, że istotnie tylko pierwsza harmoniczna dominuje w rozwiązaniu).

Literatura cytowana w tekście

1. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the normal coordinates in an analysis of steady-state forced vibrations of a nonlinear multiple-degree-of-freedom system*, Arch. Mech. Stos., **21**, 5 (1969).
2. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Postacie drgań przy rezonansie nieliniowego układu o dwóch stopniach swobody*, Arch. Budowy Maszyn, 1 (1962).
3. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the asymptotic, averaging and Ritz method in the theory of steady-state vibrations of nonlinear systems with many degrees of freedom*, Arch. Mech. Stos., **22**, 2 (1970)
4. И. И. БОГОЛЮБОВ, Я. А. МИТРОПОЛЬСКИ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Г.Н.Ф-М Л., Москва 1963.

Резюме

НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В АНАЛИЗЕ ГЛАВНЫХ РЕЗОНАНСОВ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматриваются стационарные колебания в окрестности главных резонансов диссипативной системы с n степенями свободы, обладающей нелинейными характеристиками упругости и демпфирования. Решение предполагается в виде гармонической функции, а для определения неизвестных коэффициентов применяется метод Ритца.

Целью исследования является анализ точности и пригодности двух вариантов упрощенных процедур, приводящих к разделению уравнений движения. Первая процедура состоит во введении нормальных координат линеаризованной системы и в пренебрежении сопряженностью; вторая — основана на применении тнзв. нелинейных нормальных координат.

S u m m a r y

NORMAL COORDINATES IN THE ANALYSIS OF PRINCIPAL RESONANCES OF NON-LINEAR VIBRATING SYSTEMS WITH MANY DEGREES OF FREEDOM

The considerations concern steady-state vibrations of dissipative multiple-degree-of-freedom nonlinear systems. Theoretical investigations are based on a single term harmonic solution and the W. Ritz method. The purpose of the paper is the analysis of accuracy and applicability of two approximate procedures leading to uncoupling of the equations of motion: 1) a procedure consisting in introducing normal coordinates of linearized system and neglecting the coupling terms; 2) a procedure based on the concept of nonlinear normal coordinates.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lutego 1972 r.