

APROKSYMACJA POWIERZCHNI NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PRZEKROJU RUROCIĄGU GRUBOŚCIENNEGO PRZY OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

JACEK SKRZYPEK, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

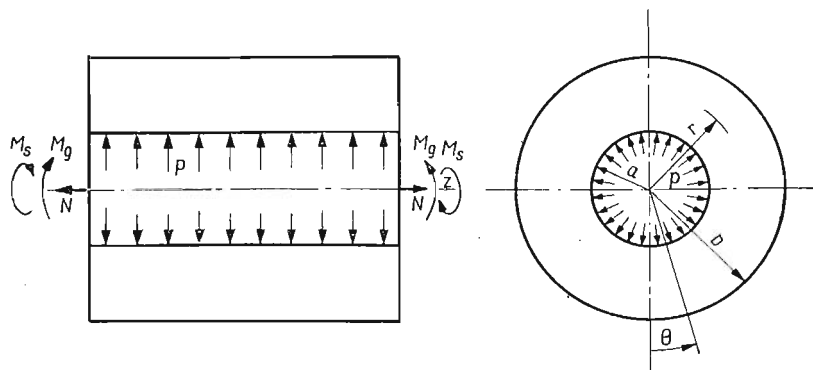
Analiza nośności granicznej rur grubościennych przy różnych kombinacjach obciążeń zajmuje w literaturze technicznej sporo miejsca. Szczególnie ważne, z punktu widzenia zastosowań, są jednak takie problemy, które nie wykazują we współrzędnych walcowych kołowej symetrii.

PIECHNIK i ŻYCZKOWSKI [2, 3] stosując metodę małego parametru uzyskali rozwiązania dla łącznego obciążenia momentami zginającymi i skręcającymi. W innej pracy ŻYCZKOWSKI [9] wyprowadził równania dla potrójnie złożonego obciążenia rury: ciśnieniem, momentem zginającym i siłą osiową, oraz podał rozwiązania dla fragmentu powierzchni granicznej w okolicy czystego ciśnienia. SKRZYPEK [4] uogólnił powyższe rozważania wprowadzając dodatkowo czwarte obciążenie — moment skręcający. Otrzymany w tej pracy układ trzech sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych rozwiązano przy założeniu niewielkiego wpływu zginania, skręcania i rozciągania na nośność rury poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego. W innej pracy tego samego autora [5] uzyskano proste, statycznie dopuszczalne rozwiązanie omawianego układu równań przy pewnych założeniach upraszczających, zakładając mianowicie nierozciągliwą oś rury i pomijając skręcanie. W niedawno opublikowanej pracy STOKEY, PETERSON i WUNDER [7] przedstawili przy zastosowaniu warunku plastyczności Treski przybliżone, statycznie dopuszczalne rozwiązanie w poczwórnie złożonym przypadku obciążenia (ciśnienie, zginanie, skręcanie, rozciąganie).

Głównym zamierzeniem obecnej pracy jest wyprowadzenie równania aproksymacyjnego (typu Hermite'a) powierzchni granicznej w czterowymiarowej przestrzeni sił uogólnionych: ciśnienia wewnętrznego, momentu zginającego, momentu skręcającego i siły osiowej. Najpierw podamy rozwiązanie podstawowego układu równań różniczkowych rządzących tym problemem (wyprowadzonego w cytowanej wyżej pracy [4]) przy założeniu niewielkiego wpływu ciśnienia, zginania i rozciągania na stan graniczny rurociągu skręcanego, które wraz z rozwiązaniem uzyskanym w pracy [4] i niektórymi innymi prostszymi rozwiązaniami zostanie wykorzystane przy konstruowaniu równania powierzchni granicznej.

2. Założenia i równania wyjściowe

1. Rozważamy zjawiska zachodzące w przekroju grubościennego rurociągu cylindrycznego poddanego jednoczesnemu działaniu ciśnienia wewnętrznego, siły osiowej oraz momentów: zginającego i skręcającego. Analizę prowadzimy we współrzędnych walcowych r, θ, z pamiętając, że w omawianym przypadku obciążenia stan naprężenia i odkształcenia jest niezależny od zmiennej z .



Rys. 1

2. Stosujemy teorię plastyczności Hencky'ego–Iliuszyna, względnie Levy'ego–Misesa (przy formalnym zastąpieniu odkształceń prędkościami odkształceń).

3. Rurociąg wykonany jest z materiału idealnie plastycznego, nieściśliwego, izotropowego i podlegającego warunkowi plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego.

4. Ograniczamy się do analizy wyłącznie stanu plastycznego. Dyskusję tego problemu przytoczono w pracy [4].

Przy powyższych założeniach w pracy jednego z autorów [4] przeprowadzono redukcję pełnego układu szesnastu równań teorii plastyczności do trzech sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych, cząstkowych, rzędu drugiego i czwartego, dzięki wprowadzeniu funkcji naprężeń i bezwymiarowego modułu plastycznego:

$$\left\{ \left(\Phi'' - \frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right)^2 + 4 \left[\left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right)^2 + (\Psi')^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \Psi' \right)^2 \right] - 1 \right\} H^2 +$$

$$+ 3(\kappa^2 \varrho^2 \cos^2 \theta + 2\kappa \lambda \varrho \cos \theta + \lambda^2) = 0,$$

$$(2.1) \quad \left(\varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + 3\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[\left(\Phi'' - \frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right) H \right] +$$

$$+ 4 \left(\varrho \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right) H \right] = 0,$$

$$\left(1 + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) [H \Psi'] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[H \frac{1}{\varrho} \Psi' \right] + \vartheta \varrho = 0.$$

Dla ułatwienia korzystania z tych wzorów zachowujemy przyjęte tam oznaczenia: $\kappa, \lambda, \vartheta$ oznaczają parametry proporcjonalne odpowiednio do krzywizny, wydłużenia i kąta

skręcenia (lub ich prędkości); $\varrho = \frac{r}{b}$ — bezwymiarowy promień; Φ, Ψ — bezwymiarowe funkcje naprężeń określone następującymi wzorami:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \Phi'', \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \varepsilon_z + \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right), \quad \tau_{rz} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{\varrho} \Psi', \quad \tau_{\theta z} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \Psi'; \end{aligned}$$

H — bezwymiarowy moduł plastyczny:

$$(2.3) \quad H = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \varphi;$$

σ_0 — granica plastyczności dla jednoosiowego rozciągania; φ — moduł w prawie fizycznym $D_\varepsilon = \varphi D_\sigma$. Różniczkowanie względem bezwymiarowego promienia ϱ oznaczono primami, a względem kąta θ — kropkami.

3. Rozwiązanie dla przypadku dużego momentu skręcającego

Przejdźmy obecnie do rozwiązania podstawowego układu równań (2.1) w obszarze dużego skręcania, a więc zakładając niewielki wpływ ciśnienia wewnętrznego, momentu zginającego i siły osiowej na nośność graniczną rurociągu skręcanego. Zastosowanie metody małego parametru pozwala tu na rozprzężenie układu równań nieliniowych, tak że na poszczególne poprawki poszukiwanych funkcji będziemy otrzymywać łatwe do rozwiązania równanie liniowe typu Eulera. Zastosowanie praktyczne rozpatrywanego zakresu jest raczej niewielkie, jednak uzyskane wyniki wykorzystamy przy konstruowaniu ogólnych wzorów aproksymacyjnych.

Rozwiązanie będziemy przyjmować w postaci szeregów potęgowych następujących parametrów: κ — proporcjonalnego do krzywizny, λ — do jednostkowego wydłużenia oraz ξ — do ciśnienia wewnętrznego (lub do ich odpowiednich prędkości). Parametry te niekoniecznie muszą być małe. Otrzymywać jednak będziemy wyłącznie szeregi parametrów κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ , gdzie ϑ jest proporcjonalne do jednostkowego kąta skręcenia i w omawianym przypadku jest także duże. W efekcie więc κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ mogą być uważane za małe.

Przyjmijmy rozwiązanie w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \\ H &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \\ \Psi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \end{aligned}$$

przy czym dla czystego skręcania odpowiednie wartości wynoszą

$$(3.2) \quad \Phi_{000} = 0; \quad H_{000} = \vartheta \varrho; \quad \Psi_{000} = -\frac{1}{2} \varrho.$$

Rozwiązanie układu podstawowego rozpoczynamy od drugiego spośród równań (2.1). Uwzględniając (3.2) możemy stąd obliczać kolejno Φ_{ijk} jako funkcje $H_{i-1,j,k}$, $H_{i,j-1,k}$ oraz $H_{i,j,k-1}$. Dla poszczególnych poprawek funkcji Φ otrzymujemy w ten sposób liniowe równania różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu o postaci

$$(3.3) \quad \Phi_{ijk}'''' + \frac{4}{\varrho} \Phi_{ijk}''' + \frac{2}{\varrho^2} \Phi_{ijk}'' + \frac{1}{\varrho^4} \Phi_{ijk}'' + \frac{1}{\varrho^4} \Phi_{ijk}'''' = f_{ijk}(\varrho, \theta).$$

Całkę ogólną równania (3.3) przyjmujemy w formie szeregu Fouriera

$$(3.4) \quad \Phi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varrho) \cos(n\theta) + \overline{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

gdzie $\overline{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta)$ oznacza rozwiązania szczególne równań niejednorodnych (3.3). Dzięki temu, że w równaniach tych występują tylko parzyste pochodne względem kąta θ , dla funkcji $f_n(\varrho)$ będziemy otrzymywać wyłącznie równania typu Eulera (identyczne dla wszystkich i, j, k)

$$(3.5) \quad f_n'''' + \frac{4}{\varrho} f_n''' - \frac{2n^2}{\varrho^2} f_n'' - \frac{n^2}{\varrho^4} (1 - n^2) f_n = 0,$$

skąd

$$(3.6) \quad f_n(\varrho) = C \varrho^m.$$

Rozwiązania ogólne przyjmują zatem ostatecznie postać

$$(3.7) \quad \Phi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{n1} \varrho^{m_{n1}} + C_{n2} \varrho^{m_{n2}} + C_{n3} \varrho^{m_{n3}} + C_{n4} \varrho^{m_{n4}}) \cos(n\theta) + \overline{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

przy czym $m_{n1}, \dots, m_{n4}$ obliczamy jako pierwiastki równań charakterystycznych dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(3.8) \quad m^4 - 2m^3 - m^2(1 + 2n^2) + 2m(1 + n^2) - n^2(1 - n^2) = 0.$$

Obliczanie poprawek funkcji Ψ jest znacznie prostsze. W tym celu wykorzystamy pierwsze równanie z układu (2.1). Pamiętając o (3.2) wyliczamy stąd kolejno Ψ_{ijk} w funkcji $H_{i-1,j,k}$, $H_{i,j-1,k}$ i $H_{i,j,k-1}$ posługując się równaniami pierwszego rzędu typu

$$(3.9) \quad \Psi'_{ijk} = f_{ijk}(\varrho, \theta)$$

o rozwiązaniach

$$(3.10) \quad \Psi_{ijk} = C(\theta) + \overline{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

gdzie $\overline{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta)$ oznacza całki szczególne równania niejednorodnego (3.9).

Równie łatwo oblicza się poprawki funkcji H , stosując ostatnie z równań (2.1). H_{ijk} wyznaczamy stąd kolejno jako funkcje $\Psi_{i-1,j,k}$, $\Psi_{i,j-1,k}$, $\Psi_{i,j,k-1}$ stosując równania rzędu pierwszego postaci

$$(3.11) \quad H'_{ijk} + \frac{1}{\varrho} H_{ijk} = f_{ijk}(\varrho, \theta).$$

Rozwiązanie ogólne równań (3.11) ma zatem kształt

$$(3.12) \quad H_{ijk} = \frac{C(\theta)}{\varrho} + \overline{H}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

przy czym przez $\bar{H}_{ijk}(\varrho, \theta)$ oznaczono całki szczególne równania niejednorodnego (3.11).

Wyrażenia (3.7), (3.10) i (3.12) określają w omawianym zadaniu stan naprężenia i odkształcenia. Należy do nich jeszcze zastosować warunki brzegowe, mianowicie na brzegu zewnętrznym, dla $\varrho = 1$

$$(3.13) \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0,$$

oraz na brzegu wewnętrznym, dla $\varrho = \beta = a/b$

$$(3.14) \quad \sigma_r = -p; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0.$$

Spośród sześciu warunków (3.13) i (3.14) pięć może być spełnionych w sposób ścisły, mianowicie wszystkie warunki dla naprężeń σ_r i $\tau_{r\theta}$ oraz jeden z warunków dla naprężenia τ_{rz} . Pozostały, szósty warunek musi być postawiony inaczej np. w formie całkowej

$$(3.15) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{rz} d\theta = 0.$$

W pracy [4] przedyskutowano inne możliwości spełnienia warunków brzegowych dla podobnego problemu nośności granicznej w otoczeniu czystego ciśnienia¹⁾.

Ze względu na to, że wymienione warunki nie zawsze są niezależne, zachodzi często konieczność korzystania z dodatkowych warunków typu przemieszczeniowego. Tak więc dla poprawek nie uwzględniających zginania można stosować warunek kołowej symetrii

$$(3.16) \quad \varepsilon_\theta r - u_r = 0,$$

gdyż

$$(3.17) \quad u_\theta = \int (\varepsilon_\theta r - u_r) d\theta + C_\theta = u_\theta(r);$$

jeśli natomiast kołowa symetria nie zachodzi — warunek zgodności przemieszczeń, który musi być spełniony tożsamościowo

$$(3.18) \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \gamma_{r\theta} = 2\varphi\tau_{r\theta}.$$

Korzystając ze wzorów (3.7), (3.10) i (3.12) oraz uwzględniając warunki brzegowe i warunki zgodności (3.13)–(3.18), możemy obliczyć kolejne poprawki funkcji Φ , Ψ oraz H . Ograniczając się do niezerowych poprawek, do stopnia trzeciego włącznie, otrzymujemy w ten sposób:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \Phi_{001} &= \left(\frac{2}{\varrho} + \varrho^2 \right) \frac{1}{\vartheta}, \\ \Phi_{003} &= 12 \left[\frac{2(1-\beta^9) + \varrho^3(1-\beta^6)}{2\beta^6(1-\beta^3)\varrho} - \frac{1}{7\varrho^7} \right] \frac{1}{\vartheta^3}, \\ \Phi_{111} &= \left\{ \frac{36 \ln \beta}{\beta \frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta \frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left[\frac{\varrho \frac{1+\sqrt{17}}{2}}{1+\sqrt{17}} + \frac{\varrho \frac{1-\sqrt{17}}{2}}{1-\sqrt{17}} \right] + \frac{2(1+3 \ln \varrho)}{\varrho^2} \right\} \frac{\cos \theta}{\vartheta^3}, \\ \Phi_{201} &= \left[C_{21}\varrho^{m_{11}} + C_{22}\varrho^{m_{22}} + C_{23}\varrho^{m_{23}} + C_{24}\varrho^{m_{24}} + \frac{3}{2} \left(\frac{7}{\varrho^2} - \frac{3}{\varrho} \right) \right] \frac{\cos 2\theta}{\vartheta^3}. \end{aligned}$$

¹⁾ np. stosując metodę Trefftza lub obliczając kres dolny rozwiązania.

Wykładniki m_{21} , m_{22} , m_{23} i m_{24} są rzeczywistymi pierwiastkami równania algebraicznego (3.8) dla $n = 2$, czyli

$$(3.20) \quad m^4 - 2m^3 - 9m^2 + 10m + 12 = 0,$$

natomiast stałe C_{21} , C_{22} , C_{23} i C_{24} mogą być obliczone z warunków brzegowych dla funkcji Φ_{201} (3.13) i (3.14). Nie mają one jednak żadnego wpływu na analizę obciążeń i obliczenie nośności granicznej.

Poprawki pozostałych funkcji wynoszą:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \Psi_{200} &= -\frac{3}{4}(1-\varrho)\frac{\cos^2\theta}{\vartheta^2}; & \Psi_{020} &= -\frac{3}{4\varrho}\frac{1}{\vartheta^2}; \\ \Psi_{002} &= -\frac{9}{5\varrho^5}\frac{1}{\vartheta^2}; & \Psi_{110} &= \frac{3}{2}\ln\varrho\cos\theta\frac{1}{\vartheta^2} \end{aligned}$$

oraz

$$(3.22) \quad \begin{aligned} H_{200} &= \left[\frac{3\varrho}{4} + 3\left(1 - \frac{\varrho}{4}\right)\cos 2\theta \right] \frac{1}{\vartheta^2}; \\ H_{002} &= \frac{18}{\varrho^5}\frac{1}{\vartheta^2}; & H_{110} &= 3(2 - \ln\varrho)\frac{1}{\vartheta^2}. \end{aligned}$$

W oparciu o (3.19), (3.21) i (3.22) i pamiętając o (2.2) możemy obliczyć składowe stanu naprężenia

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ 2\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right)\frac{\xi}{\vartheta} + 12\left[\frac{1-\beta^9}{\beta^6(1-\beta^3)}\left(\frac{1-\beta^6}{1-\beta^9} - \frac{1}{\varrho^3}\right) + \frac{1}{\varrho^9}\right]\frac{\xi^3}{\vartheta^3} + \right. \\ &\quad + \left[\frac{18\ln\beta}{\beta\frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta\frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left(\varrho^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} - \varrho^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) - \frac{18\ln\varrho}{\varrho^4} \right] \cos\theta\frac{\kappa\lambda\xi}{\vartheta^3} + \\ &\quad \left. + \left[(m_{21}-4)C_{21}\varrho^{m_{21}-2} + \dots + \frac{9}{2}\left(\frac{5}{\varrho^3} - \frac{14}{\varrho^4}\right) \right] \cos 2\theta\frac{\kappa^2\xi}{\vartheta^3} + \dots \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ 2\left(1 + \frac{2}{\varrho^3}\right)\frac{\xi}{\vartheta} + 12\left[\frac{1-\beta^9}{\beta^6(1-\beta^3)}\left(\frac{1-\beta^6}{1-\beta^9} + \frac{2}{\varrho^3}\right) - \frac{8}{\varrho^9}\right]\frac{\xi^3}{\vartheta^3} + \right. \\ &\quad + \left[\frac{9\ln\beta}{\beta\frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta\frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left((1+\sqrt{17})\varrho^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} + (-1+\sqrt{17})\varrho^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{18(2\ln\varrho-1)}{\varrho^4} \right] \cos\theta\frac{\kappa\lambda\xi}{\vartheta^3} + \left[m_{21}(m_{21}-1)C_{21}\varrho^{m_{21}-2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{2}\left(-\frac{2}{\varrho^3} + \frac{14}{\varrho^4}\right) \right] \cos 2\theta\frac{\kappa^2\xi}{\vartheta^3} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.23) \quad [\text{c.d.}] \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{2\varrho^3} \right) \frac{\xi}{\vartheta} + \frac{3}{2} \cos \theta \frac{\kappa}{\vartheta} + \frac{3}{2\varrho} \frac{\lambda}{\vartheta} - \right. \\
 & - \frac{9}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{4-\varrho}{2\varrho} \cos 2\theta \right] \cos \theta \frac{\kappa^3}{\vartheta^3} + 12 \left[\frac{1-\beta^9}{\beta^6(1-\beta^3)} \left(\frac{1-\beta^6}{1-\beta^9} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2\varrho^3} \right) - \frac{7}{2\varrho^9} \right] \frac{\xi^3}{\vartheta^3} - \frac{27}{\varrho^6} \cos \theta \frac{\kappa \xi^2}{\vartheta^3} - \frac{18}{\varrho^7} \frac{\lambda \xi^2}{\vartheta^3} - \\
 & - \frac{9(2-\ln \varrho)}{2\varrho^2} \cos \theta \frac{\kappa \lambda^2}{\vartheta^3} - \frac{9}{4\varrho} \left[\ln \varrho - \frac{3}{2} + \left(\frac{2+\ln \varrho}{\varrho} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{5}{2} \right) \cos(2\theta) \right] \frac{\kappa^2 \lambda}{\vartheta^3} + \left[\frac{9 \ln \beta}{\beta^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} - \beta^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}} \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \varrho^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \varrho^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) + \frac{9(\ln \varrho - 1)}{\varrho^4} \right] \cos \theta \frac{\kappa \lambda \xi}{\vartheta^3} + \\
 & \left. + \left[\frac{1}{2} (m_{21}^2 - m_{21} - 4) C_{21} \varrho^{m_{21}-2} + \dots + \frac{27}{4\varrho^3} \right] \cos 2\theta \frac{\kappa^2 \xi}{\vartheta^3} + \dots \right\};
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left\{ \left[\frac{18 \ln \beta}{\beta^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} - \beta^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}} \left(\varrho^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} - \varrho^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{18 \ln \varrho}{\varrho^4} \right] \sin \theta \frac{\kappa \lambda \xi}{\vartheta^3} + \left[2(1-m_{21}) C_{21} \varrho^{m_{21}-2} - \dots + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 6 \left(\frac{7}{\varrho^4} - \frac{2}{\varrho^3} \right) \right] \sin 2\theta \frac{\kappa^2 \xi}{\vartheta^3} + \dots \right\}, \\
 (3.24) \quad \tau_{\theta z} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{\varrho^6} \frac{\xi^2}{\vartheta^2} + \frac{3}{8} (1 + \cos 2\theta) \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} - \frac{3}{2\varrho^3} \frac{\lambda^2}{\vartheta^2} - \frac{3}{\varrho} \cos \theta \frac{\kappa \lambda}{\vartheta^2} + \dots \right], \\
 \tau_{rz} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\frac{3}{4} (1-\varrho) \sin 2\theta \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} + \frac{3}{\varrho} \sin \theta \frac{\kappa \lambda}{\vartheta^2} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Parametry κ , λ , ξ we wzorach (3.23) i (3.24) występują jak widać zawsze w formie stosunków κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ , przy czym ϑ oznacza jednostkowy kąt skrzywienia. Posługując się wyrażeniami (3.19), (3.21) i (3.22) można także uzyskać wzory na odkształcenia (względnie prędkości odkształceń).

Na rys. 2 przedstawiono graficznie wykresy naprężeń dla trzech przekrojów rury o stosunku promieni $\beta = 1/2$ ($\theta = 45^\circ$, $\theta = 180^\circ$, $\theta = 270^\circ$), uzyskane w oparciu o wzory (3.23) i (3.24) z wykorzystaniem poprawek rzędu drugiego włącznie. Obliczenia wykonano dla wartości parametrów $\xi/\vartheta = 0,01$, $\kappa/\vartheta = \lambda/\vartheta = 0,1^2$.

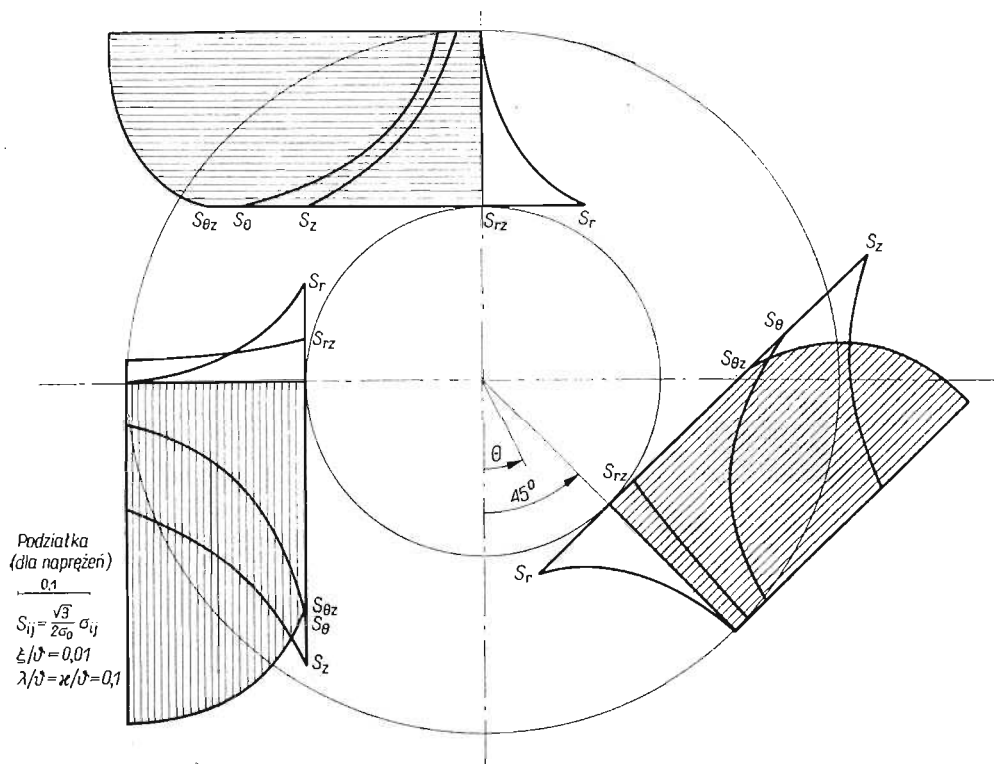
²⁾ Przyjęta tu wartość parametru $\xi/\vartheta = 0,01$ wynosi około $1/5 (\xi/\vartheta)_{\max}$ [por. (3.32)].

Przejdźmy obecnie do wyznaczenia obciążeń wywołujących stan plastyczny rury. Siłę osiową możemy obliczyć ze wzoru

$$(3.25) \quad N = \iint_F \sigma_z dF = b^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\beta}^1 \sigma_z \varrho d\varrho,$$

a po uwzględnieniu (3.23), wykonaniu całkowania i przejściu do zapisu bezwymiarowego mamy

$$(3.26) \quad n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sigma_0 b^2} N = 3(1-\beta) \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{2(1-\beta^3)}{\beta} \frac{\xi}{\vartheta} - \frac{54(1-\beta^5)}{5\beta^5} \frac{\lambda\xi^2}{\vartheta^3} - \\ - \frac{9}{2} \left[\beta \ln \frac{1}{\beta} - \frac{5}{2}(1-\beta) \right] \frac{\kappa^2 \lambda}{\vartheta^3} + \dots$$



Rys. 2

Moment zginający obliczamy ze wzoru

$$(3.27) \quad M_\theta = \iint_F r \sigma_z \cos \theta dF = b^3 \int_{\beta}^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{2\pi} \sigma_z \cos \theta d\theta,$$

a po wykonaniu całkowania i stosując jak poprzednio zapis bezwymiarowy uzyskujemy

$$(3.28) \quad m_\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\sigma_0 b^3} M_\theta = 2(1-\beta^3) \frac{\kappa}{\vartheta} - \frac{9}{2} \left[\frac{1-\beta^3}{6} + 1-\beta^2 \right] \frac{\kappa^3}{\vartheta^3} - \\ - 18 \left[3(1-\beta) - \beta \ln \frac{1}{\beta} \right] \frac{\kappa\lambda^2}{\vartheta^3} - \frac{36(1-\beta^3)}{\beta^3} \frac{\kappa\xi^2}{\vartheta^3} + \dots$$

Wreszcie moment skręcający otrzymujemy przez całkowanie naprężenia $\tau_{\theta z}$ (3.24), mianowicie

$$(3.29) \quad M_s = \int_F \tau_{\theta z} r dF = 2\pi b^3 \int_\beta^1 \tau_{\theta z} \varrho^2 d\varrho$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(3.30) \quad m_s = \frac{\sqrt{3}}{W_0 \sigma_0} M_s = \frac{4}{1-\beta^4} \left[\frac{1-\beta^3}{3} - \frac{1-\beta^4}{4} \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} - \right. \\ \left. - \frac{3(1-\beta)}{2} \frac{\lambda^2}{\vartheta^2} - \frac{6(1-\beta^3)}{3} \frac{\xi^2}{\vartheta^2} + \dots \right],$$

gdzie W_0 oznacza sprężysty wskaźnik skręcania

$$(3.31) \quad W_0 = \frac{\pi b^3 (1-\beta^4)}{2}.$$

Ciśnienie wewnętrzne obliczamy z pierwszego z warunków brzegowych (3.14), co po wprowadzeniu zapisu bezwymiarowego daje

$$(3.32) \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} p = -\frac{2(1-\beta^3)}{\beta^3} \frac{\xi}{\vartheta}.$$

Równania (3.26), (3.28), (3.30) i (3.32) opisują w formie parametrycznej rozpatrywany fragment powierzchni granicznej z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia; parametrami są κ/ϑ , λ/ϑ , ξ/ϑ i dodatkowo stosunek promieni β .

Przy konstruowaniu równania aproksymacyjnego wygodniej będzie się posługiwać wzorem w postaci jawnej

$$(3.33) \quad m_s = m_s(m_\theta, n, q),$$

które uzyskujemy przez eliminację parametrów κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ z układu równań parametrycznych (3.26), (3.28), (3.30) i (3.32). Po przekształceniach otrzymujemy w ten sposób ostatecznie

$$(3.34) \quad m_s = \frac{4}{1-\beta^4} \left[\frac{1-\beta^3}{3} - \frac{9\beta^3 + \beta^4(1+\beta+\beta^2)}{8(1-\beta^3)} q^2 - \frac{1}{6(1-\beta)} n^2 + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{2\sqrt{3}(1-\beta)} qn - \frac{1}{16(1-\beta^3)} m_\theta^2 + \dots \right].$$

Równanie powyższe jest poszukiwanym równaniem (w postaci jawnej) fragmentu powierzchni granicznej w otoczeniu czystego skręcania.

4. Uwagi odnośnie innych rozwiązań

Obecnie przedyskutujemy możliwości rozwiązania podstawowego układu równań (2.1) przy innych, nie rozważanych dotąd sposobach obciążenia, mianowicie w otoczeniu czystego rozciągania i czystego zginania.

Zajmijmy się na początek analizą wpływu ciśnienia, momentu zginającego i momentu skręcającego na nośność graniczną rurociągu rozciąganego. Ten typ obciążenia, podobnie jak w przypadku omówionym w p. 3, nie posiada większego znaczenia praktycznego. Zastosowanie metody małego parametru napotyka tu na pewne trudności, bowiem punkt odpowiadający czystemu rozciąganiu ($p = 0$, $m_s = 0$) jest punktem osobliwym z uwagi na wpływ zginania. Problem ten był badany szczegółowo przez ŻYCZKOWSKIEGO w [8], gdzie dla rury grubościennnej uzyskano uogólnione szeregi potęgowe o wykładnikach 1, 5/3, 7/3, ... itd. Przedstawimy zatem rozwiązanie uwzględniające tylko obciążenia kołowo-symetryczne, a więc bez zginania.

Będziemy poszukiwać funkcji naprężeń i modułu plastycznego w postaci szeregów

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{ij}(\varrho) \xi^i \vartheta^j, \\ \Psi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{ij}(\varrho) \xi^i \vartheta^j, \\ H &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} H_{ij}(\varrho) \xi^i \vartheta^j, \end{aligned} \quad (4.1)$$

przy czym zerowe aproksymacje wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= \Psi_{00} = 0, \\ H_{00} &= \pm \sqrt{3} \lambda; \end{aligned} \quad (4.2)$$

ξ , ϑ , λ oznaczają, podobnie jak poprzednio, parametry proporcjonalne do ciśnienia, jednostkowego kąta skręcenia i jednostkowego wydłużenia. Na kolejne poprawki modułu H uzyskujemy, w oparciu o (2.1) i po wprowadzeniu (4.2), równania algebraiczne. Poprawki funkcji naprężeń Φ wyznaczamy z równań Eulera czwartego rzędu typu

$$\Phi_{ij}'''' + \frac{2}{\varrho} \Phi_{ij}''' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi_{ij}'' + \frac{1}{\varrho^3} \Phi_{ij}' = f_{ij}(\varrho), \quad (4.3)$$

których rozwiązanie ogólne ma postać

$$\Phi_{ij} = C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \ln \varrho + C_4 \varrho^2 \ln \varrho + \bar{\Phi}_{ij}(\varrho). \quad (4.4)$$

Dla poprawek drugiej funkcji naprężeń Ψ otrzymujemy jeszcze prostsze równania Eulera drugiego rzędu

$$\Psi_{ij}'' + \frac{1}{\varrho} \Psi_{ij}' = f_{ij}(\varrho) \quad (4.5)$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$\Psi_{ij} = C_1 + C_2 \varrho^2 + \bar{\Psi}_{ij}(\varrho). \quad (4.6)$$

$\overline{\Phi}_{ij}(\varrho)$ i $\overline{\Psi}_{ij}(\varrho)$ oznaczają odpowiednio całki szczególne równań niejednorodnych (4.3) i (4.5).

Stosując do (4.4) i (4.6) warunki brzegowe (3.13), (3.14) oraz pamiętając o (2.2) wyznaczamy składowe stanu naprężenia w funkcji parametrów ξ/λ i ϑ/λ

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\beta^2(1-\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} \frac{\xi}{\lambda} + \frac{2\beta^2}{3(1-\beta^2)^3} \left[\frac{(1-\beta^6)(1-\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} - \frac{\beta^4(1-\varrho^6)}{\varrho^6} \right] \frac{\xi^3}{\lambda^3} + \dots \right\}, \\
 \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ -\frac{\beta^2(1+\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} \frac{\xi}{\lambda} + \frac{2\beta^2}{3(1-\beta^2)^3} \left[-\frac{(1-\beta^6)(1+\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} + \frac{\beta^4(5+\varrho^6)}{\varrho^6} \right] \frac{\xi^3}{\lambda^3} + \dots \right\}, \\
 \sigma_z &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\xi}{\lambda} - \frac{\sqrt{3}\beta^4}{(1-\beta^2)^2\varrho^4} \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \frac{\sqrt{3}\varrho^2}{12} \frac{\vartheta^2}{\lambda^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\beta^2}{3(1-\beta^2)^3} \left[-\frac{1-\beta^6}{1-\beta^2} + \frac{\beta^4(2+\varrho^6)}{\varrho^6} \right] \frac{\xi^3}{\lambda^3} + \dots \right\}, \\
 \tau_{\theta z} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\varrho}{2\sqrt{3}} \frac{\vartheta}{\lambda} - \frac{\varrho^3}{12\sqrt{3}} \frac{\vartheta^3}{\lambda^3} + \dots \right], \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{rz} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Wykorzystując uzyskany rozkład naprężeń i posługując się wzorami (3.25), (3.29) i (3.32) otrzymujemy następujące wyrażenia na obciążenia wyczerpujące nośność graniczną rurociągu:

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} p = -\frac{\xi}{\lambda}, \tag{4.8}$$

$$m_s = \frac{\sqrt{3}}{W_0\sigma_0} M_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\vartheta}{\lambda} - \frac{1-\beta^6}{9\sqrt{3}(1-\beta^4)} \frac{\vartheta^3}{\lambda^3} + \dots, \tag{4.9}$$

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi b^2\sigma_0} N = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2} - \beta^2 \frac{\xi}{\lambda} - \frac{\beta^2\sqrt{3}}{1-\beta^2} \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{24} \frac{\vartheta^2}{\lambda^2} + \dots \tag{4.10}$$

lub po dokonaniu deparametryzacji układu równań (4.8)–(4.10)

$$n = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2} + \beta^2 q - \frac{\sqrt{3}\beta^2}{1-\beta^2} q^2 - \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{8} m_s^2 + \dots \tag{4.11}$$

Otrzymany układ równań (4.8)–(4.10) opisuje, w omawianym przypadku obciążenia, fragment powierzchni granicznej w sposób parametryczny, natomiast równanie (4.11) — w sposób jawny³⁾. Wzory te nie uwzględniają oczywiście wpływu zginania. Celem uzyska-

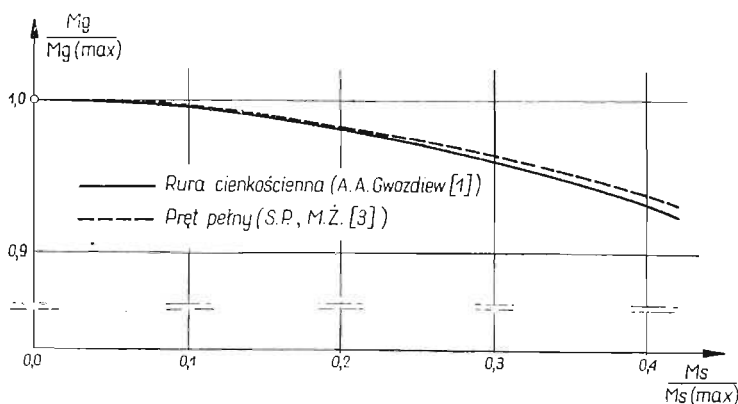
³⁾ Wzory te można również uzyskać stosując rozwinięcia na szeregi potęgowe wzorów podanych we wspólnej pracy obu autorów [6].

nia kompletnego rozwiązania (potrzebnego do budowy równania aproksymacyjnego powierzchni granicznej) poprawki uwzględniające wpływ zginania zaczerpnijemy z pracy jednego z autorów [8] uzyskując ostatecznie

$$(4.12) \quad n = \frac{\sqrt[3]{3}(1-\beta^2)}{2} \left[1 + \frac{2\beta^2}{\sqrt[3]{3}(1-\beta^2)} q - \frac{2\beta^2}{(1-\beta^2)^2} q^2 - \right. \\ \left. - \frac{1+\beta^2}{4} m_s^2 - \frac{1}{2\sqrt[3]{3}(1-\beta^2)} m_g - \frac{3^{5/6}\pi^{2/3}}{80(1-\beta^2)} m_g^{5/3} + \dots \right].$$

Równanie (4.12) jest pełnym równaniem części powierzchni granicznej w otoczeniu dużego rozciągania. Nie uwzględnia ono jedynie ewentualnych wyrazów pochodzących od łącznego działania ciśnienia i momentu zginającego (q , m_g) oraz obu momentów (m_s , m_g); uzasadnione jest jednak przypuszczenie, że są to wyrazy wyższych rzędów.

Przejdźmy obecnie do dyskusji wpływu ciśnienia, siły osiowej i momentu skręcającego na stan graniczny rurociągu zginanego. Przyjęcie jako zerowej aproksymacji czystego zginania wprowadza do rozwiązania jeszcze większe trudności niż omówione poprzednio. Taki stan wyjściowy posiada bowiem linię nieciągłości i do rozwiązania należałoby zastosować zmodyfikowaną metodę małego parametru (metodę P-L-K), co z uwagi na wysoki rząd równań różniczkowych jest bardzo skomplikowane. Również przyjęcie jako punktu wyjścia łącznego obciążenia siłą osiową i momentem zginającym napotyka trudności tego



Rys. 3

samego rodzaju. Przy konstruowaniu równania aproksymacyjnego będziemy się zatem posługiwać wzorami uzyskanymi w oparciu o pewne rozwiązanie statycznie dopuszczalne wyprowadzone przez jednego z autorów w pracy [5]. Rozwiązanie to wyprowadzone dla rurociągu poddanego działaniu ciśnienia, momentu zginającego i siły osiowej przy założeniu nierozciągliwej osi określa wprawdzie tylko kres dolny, jednak jest dość dokładne, gdyż równania kinematyczne są w nim spełnione wszędzie z wyjątkiem linii nieciągłości naprężeń (wzdłuż której rozwiązanie jest zatem kinematycznie niedopuszczalne)⁴⁾.

⁴⁾ Szczegółową dyskusję tego problemu i ocenę dokładności cytowanych rozwiązań znaleźć można w pracy [5].

Poprawki uwzględniające wpływ siły osiowej zaczerpnijemy wprost z pracy [8]. Więcej kłopotu nastęrcza uwzględnienie wpływu momentu skręcającego. PIECHNIK i ŻYCZKOWSKI [3] analizowali wpływ skręcania na nośność graniczną pełnych prętów zginanych; GWOZDIEW [1] natomiast badał to samo dla rur cienkościennych (przy zastosowaniu wariacyjnych metod teorii plastyczności). Porównanie numeryczne obu tych rozwiązań (po sprowadzeniu do dogodnej postaci bezwymiarowej) — rys. 3, wskazuje na bardzo małe różnice w dużym zakresie obciążeń. Pozwala to przypuszczać, że odpowiednie rozwiązanie dla rury grubościennej, zawarte z pewnością pomiędzy obu rozważanymi przypadkami (dla pręta i rury cienkościennej) również nieznacznie tylko od nich się różni. Dla naszego problemu (rura grubościenna) zastosujemy poprawkę na skręcanie dla pręta pełnego zaczerpniętą wprost z pracy [3], gdyż jak sądzimy przypadek ten bardziej odpowiada warunkom naszego zadania. Należy jednak pamiętać, że otrzymane w ten sposób ostatecznie równanie fragmentu powierzchni granicznej w otoczeniu dużego zginania jest wzorem niezupełnie ścisłym, tak z uwagi na zastosowane podejście statyczne, jak również na omówione wyżej przybliżenia

$$(4.13) \quad m_\theta = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{2} \left[\frac{16(1+\beta+\beta^2)}{3\pi(1+\beta)(1+\beta^2)} - \frac{2\pi}{3(1-\beta)(1-\beta^4)} n^2 - \frac{32\beta^3}{\pi(1+\beta)(1+\beta^2)(1-\beta^2)^2} q^2 - \frac{3(1-\beta^4)}{\pi} 0,4036 m_s^2 + \dots \right].$$

Dla opisu powierzchni granicznej w okolicy dużego ciśnienia będziemy przyjmować następujące rozwiązanie wyprowadzone przez SKRZYPKA w cytowanej we wstępie pracy [4]⁵).

$$(4.14) \quad q = \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8(1-\beta^6)} m_g^2 - \frac{2}{3(1-\beta^4)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{3(1-\beta^4)^2}{16(1-\beta^6)} m_s^2 - \frac{8\beta^2}{9(1-\beta^4)^2} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right)^3 - \frac{\beta^2}{2(1-\beta^4)(1-\beta^6)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right) m_g^2 - \frac{\beta^2(1-\beta^4)}{4(1-\beta^6)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right) m_s^2 - \dots$$

Wzory (3.34), (4.12), (4.13) i (4.14) opisują fragmenty powierzchni granicznej w czterowymiarowej przestrzeni sił uogólnionych przy omówionych czterech sposobach obciążania.

5. Aproksymacyjne równanie powierzchni nośności granicznej

Korzystając z wyprowadzonych powyżej i zestawionych w p. 4 wzorów, podamy obecnie konstrukcję pewnych wzorów aproksymacyjnych opisujących całą powierzchnię graniczną w czterowymiarowej przestrzeni obciążeń: ciśnieniem wewnętrznym, siłą osiową,

⁵ Cytowane tu rozwiązanie uzyskano w [4] przy zastosowaniu pewnych *uśrednionych* warunków brzegowych. Autor podał tam również inne możliwości spełnienia warunków brzegowych.

momentem skręcającym i momentem zginającym. Zastosujemy uogólnioną aproksymację typu Hermite'a. Różni się ona od klasycznej aproksymacji interpolacyjnej Hermite'a uwikłaną postacią równania

$$(5.1) \quad f(q, n, m_s, m_g) = 0$$

i wykorzystaniem warunków zgodności różnych pochodnych cząstkowych liczonych w punktach odpowiadających obciążeniom czystym (pojedynczym) wzorami na pochodne funkcji uwikłanych. Wykorzystamy mianowicie wyprowadzone wyżej rozwiązania ściśle dla dużego skręcania (3.34), rozciągania (4.12) i ciśnienia (4.14) oraz rozwiązanie przybliżone w otoczeniu czystego zginania (4.13).

5.1. Warunki zgodności. W omawianym zadaniu dysponujemy warunkami zgodności wartości funkcji oraz pierwszych i drugich pochodnych cząstkowych (czystych i mieszanych) w punktach odpowiadających czystym stanom obciążenia. Dla wygody zastosujemy oznaczenia pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego $A_{i,j}$ oraz drugiego $A_{i,jk}$, gdzie indeks i oznacza jedno z obciążeń q, n, m_s, m_g [z zachowaniem kolejności według wzoru (5.1)], natomiast indeksy j oraz k — zmienne, względem których wykonujemy różniczkowanie.

Oto zestaw posiadanych warunków:

czyste ciśnienie wewnętrzne ($n = m_s = m_g = 0$):

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \bar{q} &= \ln \frac{1}{\beta} - \frac{2\beta^4}{3(1-\beta^4)} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \frac{8\beta^8}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial q}{\partial m_s} &= \frac{\partial q}{\partial m_g} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial n} &= A_{1,2} = \frac{4\beta^2}{3(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} - \frac{8\beta^6}{3(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} &= A_{1,22} = \frac{4}{3(1-\beta^4)} + \frac{16\beta^4}{3(1-\beta^4)^2} \ln \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial m_s^2} &= A_{1,33} = -\frac{3(1-\beta^4)^2}{8(1-\beta^6)} + \frac{\beta^2(1-\beta^4)}{2(1-\beta^6)} \ln \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial m_g^2} &= A_{1,44} = -\frac{1}{4(1-\beta^6)} + \frac{\beta^4}{(1-\beta^4)(1-\beta^6)} \ln \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial n \partial m_s} &= \frac{\partial^2 q}{\partial n \partial m_g} = \frac{\partial^2 q}{\partial m_s \partial m_g} = 0; \end{aligned}$$

czyste rozciąganie ($q = m_s = m_g = 0$):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2}, \\ \frac{\partial n}{\partial q} &= A_{2,1} = \beta^2, \quad \frac{\partial n}{\partial m_g} = A_{2,4} = \mp \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial n}{\partial m_s} = A_{2,3} = 0, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial q} &= A_{2,11} = -\frac{2\sqrt{3}\beta^2}{1-\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial m_s^2} = A_{2,33} = -\frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{4}, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial m_g^2} &= A_{2,44} = \infty, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial q \partial m_s} = \frac{\partial^2 n}{\partial m_s \partial m_g} = 0; \end{aligned}$$

czyste skręcanie ($q = n = m_g = 0$):

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{m_s}} &= \frac{4(1-\beta^3)}{3(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial m_s}{\partial q} &= \frac{\partial m_s}{\partial n} = \frac{\partial m_s}{\partial m_g} = 0, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial q^2} &= A_{3,11} = -\frac{9\beta^3 + \beta^4(1+\beta+\beta^2)}{(1-\beta^3)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial n^2} &= A_{3,22} = -\frac{4}{3(1-\beta)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial m_g^2} &= A_{3,44} = -\frac{1}{2(1-\beta^3)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial q \partial n} &= A_{3,12} = \frac{2\beta^2}{\sqrt{3}(1-\beta)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial q \partial m_g} &= \frac{\partial^2 m_s}{\partial n \partial m_g} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

czyste zginanie ($q = n = m_s = 0$):

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{m_g}} &= \frac{8(1-\beta^3)}{\pi\sqrt{3}}, \\
 \frac{\partial m_g}{\partial q} &= \frac{\partial m_g}{\partial n} = \frac{\partial m_g}{\partial m_s} = 0, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial q^2} &= A_{4,11} = -\frac{32\sqrt{3}\beta^2}{\pi(1+\beta)(1-\beta^2)}, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial n^2} &= A_{4,22} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}(1-\beta)}, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial m_s^2} &= A_{4,33} = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi} 0,4036(1-\beta^4)^2, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial q \partial m_s} &= \frac{\partial^2 m_g}{\partial n \partial m_s} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Wartości pozostałych dwóch pochodnych cząstkowych, mianowicie $\frac{\partial^2 n}{\partial q \partial m_g}$ (dla $n = \overline{\overline{n}}$)

oraz $\frac{\partial^2 m_g}{\partial q \partial n}$ (dla $m_g = \overline{\overline{m_g}}$) nie są znane.

5.2. Pełna aproksymacja wielomianem czwartego stopnia. Przyjmijmy równanie aproksymacyjne w postaci osiemnastoparametrowego wielomianu określającego powierzchnię graniczną w sposób uwikłany:

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & \alpha_1 q^2 + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 qn + \alpha_4 q^2 n^2 + \alpha_5 m_s^2 + \alpha_6 m_g^2 + \alpha_7 |m_g| n^2 + \\
 & + \alpha_8 q^4 + \alpha_9 n^4 + \alpha_{10} m_s^4 + \alpha_{11} m_g^4 + \alpha_{12} m_s^2 m_g^2 + \alpha_{13} q^2 m_s^2 + \alpha_{14} q^2 m_g^2 + \\
 & + \alpha_{15} n^2 m_s^2 + \alpha_{16} n^2 m_g^2 + \alpha_{17} q^3 n + \alpha_{18} qn^3 = 1.
 \end{aligned}$$

Taka forma poszukiwanego równania wynika ze znanych w literaturze rozwiązań dla przekrojów powierzchni granicznej, odpowiadającej mniej złożonym stanom obciążenia. Współczynniki α_i wyznaczamy wykorzystując warunki (5.2)–(5.5). Warunków tych jest oczywiście znacznie więcej niż liczba parametrów w równaniu (5.6). Wszystkie zerowe warunki spełnione są jednak tożsamościowo dzięki przyjętej postaci równania (5.6). Z pozostałych dwudziestu niezerowych warunków może być spełnionych osiemnaście. Tak na przykład odrzucając warunki na dwie pochodne $A_{2,11}$ i $A_{2,44}$ otrzymujemy układ osiemnastu równań, z którego można obliczyć wszystkie współczynniki α_i równania aproksymacyjnego (5.6)⁶⁾.

Ostatecznie na współczynniki α_i otrzymujemy następujące wyrażenia (częściowo rekurencyjne, wyrażające się poprzez α_8):

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{\bar{q}^2} - \alpha_8 \bar{q}^2, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{n^2} - \alpha_9 n^2, \\
 \alpha_3 &= -2A_{3,12} \left(\frac{1}{\bar{m}_s} + \alpha_{10} \bar{m}_s^3 \right), \\
 \alpha_4 &= -\frac{A_{1,22}}{\bar{q}} (\alpha_1 + 2\alpha_8 \bar{q}^2) - \frac{\alpha_2}{\bar{q}^2} - \frac{(\alpha_1 + 6\alpha_8 \bar{q}^2)(\alpha_3 + \alpha_{17} \bar{q}^2)^2}{4\bar{q}^2(\alpha_1 + 2\alpha_8 \bar{q}^2)^2}, \\
 \alpha_5 &= \frac{1}{\bar{m}_s^2} - \alpha_{10} \bar{m}_s^2, \\
 \alpha_6 &= \frac{1}{\bar{m}_g^2} - \alpha_{11} \bar{m}_g^2, \\
 \alpha_7 &= \mp 2A_{2,4} \left(\alpha_9 \bar{n} + \frac{1}{\bar{n}^3} \right), \\
 \alpha_8 &= \left\{ \frac{\frac{A_{1,33} \bar{m}_s^2}{\bar{q}^3} - \frac{A_{3,11}}{\bar{m}_s}}{A_{3,11} \bar{m}_s^2 + \frac{\bar{m}_s^3}{\bar{q}^2}} - \frac{1}{\bar{m}_s + A_{3,44} \bar{m}_g^2} \left[\frac{A_{4,33}}{\bar{m}_g} - \frac{A_{3,44} \bar{m}_g^2}{\bar{m}_s^3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\left(A_{4,33} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{m}_s^2} \right) (A_{1,44} \bar{m}_g^3 - A_{4,11} \bar{q}^3)}{\left(A_{4,11} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{q}^2} \right) \bar{q}^3 \bar{m}_g} \right] \right\} \left[\frac{\left(A_{4,33} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{m}_s^2} \right) (A_{1,44} \bar{q} \bar{m}_g^2 + \bar{q}^2)}{(A_{3,44} \bar{m}_g^2 + \bar{m}_s) \left(A_{4,11} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{q}^2} \right)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{A_{1,33} \bar{q} \bar{m}_s^2 + \bar{q}^2}{A_{3,11} \bar{m}_s^2 + \frac{\bar{m}_s^3}{\bar{q}^2}} \right]^{-1},
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

⁶⁾ Dokonany tu wybór osiemnastu, spośród dwudziestu, warunków, które należy spełnić jest podyktowany możliwością łatwego rozwiązania otrzymanego układu równań.

$$\begin{aligned}
 (5.7) \quad [\text{c.d.}] \quad \alpha_9 &= \frac{\bar{m}_s^2}{\bar{n}^3(A_{2,33}\bar{m}_s + \bar{n})} \left[\alpha_{10}\bar{m}_s^2 + A_{3,22}\frac{\bar{n}^2}{\bar{m}_s} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^2} + \alpha_{10}\bar{m}_s^2 \right) - A_{2,33}\frac{1}{\bar{n}} \right], \\
 \alpha_{10} &= \frac{\bar{q}}{\bar{m}_s^3(A_{3,11}\bar{q}^2 + \bar{m}_s)} \left[\alpha_8\bar{q}^2 + A_{1,33}\frac{\bar{m}_s^2}{\bar{q}} \left(\frac{1}{\bar{q}^2} + \alpha_8\bar{q}^2 \right) - A_{3,11}\frac{1}{\bar{m}_s} \right], \\
 \alpha_{11} &= \frac{\bar{q}^2}{\bar{m}_g^3(A_{4,11}\bar{q}^2 + \bar{m}_g)} \left[\alpha_8\bar{q}^2 + A_{1,44}\frac{\bar{m}_g^2}{\bar{q}} \left(\frac{1}{\bar{q}^2} + \alpha_8\bar{q}^2 \right) - A_{4,11}\frac{1}{\bar{m}_g} \right], \\
 \alpha_{12} &= -A_{3,44} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^3} + \alpha_{10}\bar{m}_s \right) - \frac{1}{\bar{m}_s^2} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^2} - \alpha_{11}\bar{m}_g^2 \right), \\
 \alpha_{13} &= -A_{1,33} \left(\frac{1}{\bar{q}^3} + \alpha_8\bar{q} \right) - \frac{1}{\bar{q}^2} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^2} - \alpha_{10}\bar{m}_s^2 \right), \\
 \alpha_{14} &= -A_{1,44} \left(\frac{1}{\bar{q}^3} + \alpha_8\bar{q} \right) - \frac{1}{\bar{q}^2} \left(\frac{1}{\bar{m}_g^2} - \alpha_{11}\bar{m}_g^2 \right), \\
 \alpha_{15} &= -A_{3,22} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^3} + \alpha_{10}\bar{m}_s \right) - \frac{1}{\bar{m}_s^2} \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \alpha_9\bar{n}^2 \right), \\
 \alpha_{16} &= \frac{1}{\bar{m}_g^2} [-\alpha_2 - \alpha_7|\bar{m}_g| - A_{4,22}\bar{m}_g(\alpha_6 + 2\alpha_{11}\bar{m}_g^2)], \\
 \alpha_{17} &= \frac{1}{\bar{q}^2} [-\alpha_3 - 2A_{1,2}(\alpha_1 + 2\alpha_8\bar{q}^2)], \\
 \alpha_{18} &= \frac{1}{\bar{n}^2} [-2A_{2,1}\alpha_2 - \alpha_3 - 4A_{2,1}\alpha_9\bar{n}^2].
 \end{aligned}$$

Równanie (5.6) po podstawieniu za współczynniki α_i wyrażeń (5.7) jest pełnym aproksymacyjnym równaniem powierzchni granicznej z zachowaniem wszystkich warunków zgodności wartości funkcji, pierwszych pochodnych oraz niemal wszystkich drugich pochodnych.

5.3. Aproksymacja uproszczona. Korzystanie z równania (5.6) jest dość kłopotliwe z uwagi na złożone współczynniki α_i . Zaproponujemy obecnie uproszczenie równania (5.6) do postaci siedmioparametrowej

$$(5.8) \quad \beta_1 q^2 + \beta_2 n^2 + \beta_3 qn + \beta_4 m_s^2 + \beta_5 m_g^2 + \beta_6 |m_g|n^2 + \beta_7 q^4 = 1.$$

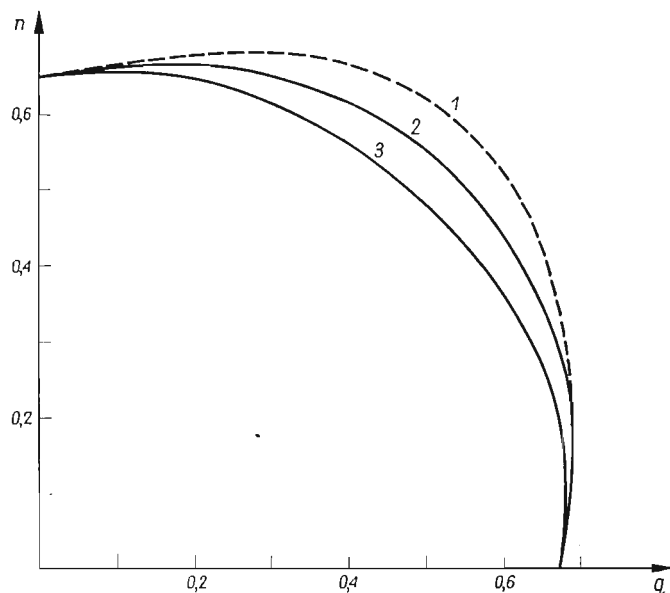
Równanie to pozwala, mimo bardzo prostej budowy, uwzględnić wszystkie warunki zgodności wartości oraz pierwszych pochodnych w punktach odpowiadających stanom czystym.

Po rozwiązaniu układu równań dla współczynników β_i otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad \frac{2}{\ln^2 \frac{1}{\beta}} \left[1 - \frac{3(1-\beta^2) - 8\beta^4}{6(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} - \frac{4\beta^8 + 9\beta^4(1-\beta^4)}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots \right] q^2 + \\
 + \frac{4}{3(1-\beta^2)^2} n^2 - \frac{8\beta^2}{3(1-\beta^2)^2} qn + \frac{9(1-\beta^4)^2}{16(1-\beta^3)^2} m_s^2 +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{3\pi^2}{64(1-\beta^3)^2} m_g^2 - \frac{4\sqrt{3}}{9(1-\beta^2)^3} |m_g| n^2 - \frac{1}{\ln^4 \frac{1}{\beta}} \left[1 - \frac{3(1-\beta^4)-8\beta^4}{3(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} + \frac{2\beta^4(-15+19\beta^4)}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots \right] q^4 = 1.$$

5.5. Przykłady. Obecnie podamy przykłady praktycznego zastosowania wyprowadzonych równań (5.6) oraz (5.9). Obliczenia numeryczne wykonamy dla stosunku promieni rury $\beta = 1/2$.



1—rozwiązanie ścisłe, 2—(5.10), 3—(5.11)

Rys. 4

Z równania (5.6) po uwzględnieniu (5.7) oraz (5.2)-(5.5) otrzymamy wówczas

$$(5.10) \quad \begin{aligned} &4,420285 q^2 + 4,7390759 n^2 - 0,0001376 qn - \\ &\quad - 9,474986 q^2 n^2 + 1,291364 m_s^2 + 1,2083156 m_g^2 + \\ &\quad + 0,00128549 |m_g| n^2 - 4,871365 q^4 - 5,6147095 n^4 - \\ &\quad - 0,4169054 m_s^4 - 0,3650067 m_g^4 - 0,7801980 m_s^2 m_g^2 - \\ &\quad - 2,850218 q^2 m_s^2 - 2,666694 q^2 m_g^2 - 3,059943 m_s^2 n^2 - \\ &\quad - 2,864565 m_g^2 n^2 - 0,00582368 q^3 n - 0,0016529 q n^3 = 1, \end{aligned}$$

natomiast z równania (5.9)

$$(5.11) \quad \begin{aligned} &2,834 q^2 + 2,370 n^2 - 1,185 qn + 0,6457 m_s^2 + \\ &\quad + 0,6043 m_g^2 - 1,825 |m_g| n^2 - 1,362 q^4 = 1. \end{aligned}$$

Przykład jednego z przekrojów powierzchni granicznej, mianowicie krzywą w płaszczyźnie (q, n) , (której równanie ścisłe jest znane) oraz jej aproksymacje wynikające z równań (5.10) i (5.11) pokazano na rys. 4. W niektórych przekrojach stosowanie rozszerzonej

aproksymacji (5.10) nie jest celowe, gdyż uzyskujemy w ten sposób wyniki nieco lepsze niż z równania (5.11) [np. w przekrojach (n, m_s) czy (m_s, m_θ)]. Wynika to stąd, że odpowiednie pochodne $A_{2,33}, A_{3,22}, \dots$ obliczane ze wzoru (5.11) mają tu wartości zbliżone do ścisłych (5.2)–(5.5); uwzględnienie więc dodatkowych warunków zgodności nie wprowadza bardziej istotnych zmian.

6. Wnioski końcowe

Zajmijmy się na koniec oceną przydatności wyprowadzonych równań aproksymacyjnych (5.6)–(5.7) oraz (5.8).

Pierwsze z nich otrzymano przy założeniu większej ilości warunków zgodności pochodnych niż drugie. W tych przekrojach, w których udało się uwzględnić zgodność pochodnych drugiego rzędu uzyskano nieco lepszą dokładność niż przy równaniu uproszczonym (5.8). Ponieważ jednak ilość swobodnych parametrów jest mniejsza od ilości przyjętych warunków (w założonej osiemnastoparametrowej postaci równania (5.6)), niektóre spośród warunków (5.2)–(5.5) pozostają niespełnione. W rezultacie w pewnych przekrojach lepsze wyniki daje wzór (5.8) (np. w przekroju n, m_θ).

Przy posługiwaniu się wzorami (5.6)–(5.7) wymagana jest ponadto duża dokładność numeryczna, z uwagi na wielokrotne odejmowanie liczb nieznacznie różniących się od siebie, co z uwagi na złożone wyrażenia na współczynniki α_i może nastroczać pewne trudności.

Do bezpośrednich zastosowań inżynierskich polecamy więc stosowanie aproksymacji uproszczonej (5.8). Wzorami (5.6)–(5.7) można się posługiwać celem ewentualnej kontroli uzyskanych tą drogą wyników, ale raczej tylko w tych przekrojach, w których zapewniono zgodność wszystkich pochodnych do rzędu drugiego włącznie.

Obydwie aproksymacje (5.6)–(5.7) oraz (5.8) mogą być używane wprost do określania nośności granicznej rurociągów izostatycznych, natomiast w przypadku rurociągów hiperstatycznych do znajdowania możliwych plastycznych schematów zniszczenia.

Literatura cytowana w tekście

1. A. A. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Строй издат 1969.
2. S. PIECHNIK, *The influence of bending on the limit state of circular bar subjected to torsion*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961), 77–106.
3. S. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the plastic interaction curve for bending and torsion of a circular bar*, Arch. Mech. Stos., 5, 13 (1961), 669–692.
4. J. SKRZYPEK, *On the limit carrying capacity of the pipe-line cross-section*, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 4 (1968) 1203–1219.
5. J. SKRZYPEK, *Dolne oszacowanie nośności granicznej nierozciągliwego grubościennego rurociągu*, Arch. Bud. Masz., 1, 16 (1969), 81–91.
6. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Stan graniczny rury grubościennej przy jednoczesnym skręcaniu, rozciąganiu i różnicy ciśnień*. Rozpr. Inż., 2, 13 (1965), 281–296; streszcz. w jęz. ang. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn. 13 (1965), 285–294.
7. W. P. STOKEY, D. B. PETERSON, R. A. WUNDER, *Limit loads for tubes under internal pressure, bending moment, axial force and torsion*, Nuclear Engng. and Design, 2, 4 (1966), 193–201.

8. M. ŻYCZKOWSKI, *Plastic interaction curves for combined bending and tension of beams with arbitrary cross-section*, Arch. Mech. Stos., 2, 17 (1965), 307-330.
9. M. ŻYCZKOWSKI, *Limit state of a thick-walled tube under internal pressure and bending*, Arch. Mech. Stos., 3, 20 (1968), 313-325.

Р е з ю м е

АППРОКСИМАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ СЛОЖНЫХ НАГРУЗКАХ

Выведено приближенное уравнение предельной поверхности, при использовании условий совместности по Эрмиту, для поперечного сечения толстостенного трубопровода, нагруженного одновременно внутренним давлением, изгибающим моментом, крутящим моментом и осевой силой.

Исходной точкой является выведенная в работе Скужипка [4] система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (2.1) описывающих рассматриваемую задачу при предположении закона пластического течения Генки-Ильюшина или Леви-Мизеса и идеально пластичного несжимаемого изотропного материала подчиняющегося условию пластичности Губера-Мизеса-Генки. Приводятся решения системы (2.1) для случая малого влияния давления, изгиба и растяжения на несущую способность трубопровода при кручении (3.34).

Для других областей предельной поверхности, а именно: в окрестности чистого изгиба и чистого растяжения даются некоторые приближенные решения. Для построения приближенного решения использовано также, полученное одним из авторов решение для большого внутреннего давления.

Приближенное уравнение записано в виде (5.7). Оно может быть непосредственно использовано для определения несущей способности изостатических трубопроводов, и для определения возможных вариантов пластических схем разрушения для случая гиперстатических трубопроводов.

S u m m a r y

ON APPROXIMATION OF THE YIELD SURFACE OF A THICK-WALLED PIPE-LINE UNDER COMBINED LOADINGS

Using the Hermite's compatibility conditions derived is an approximate equation for the yield surface of the section of a pipe-line loaded simultaneously by internal pressure, bending and twisting moments and an axial force.

The governing system of equations (2.1) for that problem was derived in previous paper [4] assuming the Hencky-Iliushin or Lévy-Mises theories, and the ideally plastic, incompressible, isotropic material obeying the Huber-Mises-Hencky yield criterion. Presented is the solution (3.34) of the system (2.1) under assumption that the influence of internal pressure, bending and tension on the bearing capacity of the twisted pipe-line is small.

For other parts of the yield surface, namely the vicinity of pure bending and pure tension certain approximate solutions are given (4.12), (4.13).

Constructing the approximate formula the previous solution of one of the authors for the case of large internal pressure is used (4.14).

The approximating equation is written in the form (5.7). It may be used directly for calculation of the bearing capacity of isostatic pipe-lines. For the hiperstatic pipe-lines, however, it may be used for finding the possible modes of plastic collapse.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 marca 1969 r.; po raz drugi 30 października 1969 r.